Colles de mathématiques en E1A

Matrices, dérivabilité

Semaine 20 : du 18 au 22 février

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Calcul matriciel

- Vocabulaire : matrice, ligne, colonne, coefficient, matrice nulle. Matrice carrée, triangulaire supérieure ou inférieure, diagonale, identité. Transposition, matrices symétriques et matrices antisymétriques.
- Opérations vectorielles : produit par un réel, somme, combinaisons linéaires, règles de calcul. Produit matriciel, règles de calcul. Transposée d'un produit.
- Calcul de puissances (entières). Définition, règles de calcul, utilisations de la récurrence. Formule du binôme de Newton *sous condition de commutativité*.
- Inversibilité d'une matrice carrée, unicité de l'inverse, règles de calcul de l'inverse, utilisation d'un polynôme annulateur. Caractérisation des matrices inversibles de taille 2. Liens avec les systèmes linéaires de Cramer et applications : critères pratiques d'inversibilité pour les matrices triangulaires ou diagonales, méthode de Gauss-Jordan, relations de liaison entre les lignes ou les colonnes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Vérifier si une opération matricielle est bien définie en fonction de la taille des matrices en jeu.
— Calculer les coefficients d'un produit de matrices ou d'une petite puissance (carré, cube, etc.)
— Simplifier des expressions algébriques matricielles à l'aide des règles de calcul.
— Appliquer, après *vérification de l'hypothèse*, la formule du binôme matricielle.
— Calculer « à la main » les petites puissances (carré, cube, etc.) d'une matrice, en déduire toutes les puissances à l'aide des règles de calcul ou d'une démonstration par récurrence (selon le cas qui se présente).
— Étudier l'inversibilité d'une matrice carrée particulière : taille 2, diagonale, triangulaire.
— Étudier l'inversibilité d'une matrice à l'aide d'une relation entre ses puissances (polynôme annulateur).
— Étudier l'inversibilité d'une matrice (et calculer son inverse) par la méthode de Gauss-Jordan.

Dérivabilité

- Taux d'accroissement, dérivabilité, dérivabilité à droite/gauche, tangente, demi-tangentes.
- Calcul de dérivées par opérations. Notation $o(1)$, développements limités à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Dérivation d'une composée de fonctions, de la réciproque d'une bijection dérivable.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point à l'aide du taux d'accroissement.
— Calculer une limite en identifiant un taux d'accroissement ou avec un développement limité.
— Calculer la dérivée d'une fonction obtenue par opérations et compositions.
— Étudier la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 2A + 3I_n$ est nulle. La matrice A est-elle inversible ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Exprimer B en fonction de A, P, P^{-1} puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N},\ B^k = PA^kP^{-1}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Énoncer et démontrer la caractérisation des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par le « produit en croix ».

$\boxed{\text{Q4}}$ Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

$\boxed{\text{Q5}}$ Exprimer le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction f dérivable en un réel x_0. En déduire les développements limités à l'ordre 1 de $\ln(x)$ en $x_0 = 1$, et de e^x et $(1+x)^\alpha$ en $x_0 = 0$.

$\boxed{\text{Q6}}$ (Rappel) Formule générale de dérivation d'une composée, dérivées des compositions usuelles :

$$x \mapsto u(x)^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad x \mapsto \frac{1}{u(x)}, \quad x \mapsto \sqrt{u(x)}, \quad x \mapsto e^{u(x)}, \quad x \mapsto \ln(u(x)), \quad x \mapsto u(x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

Prévisions pour la semaine 21 : dérivabilité