Colles de mathématiques en E1A

Continuité et matrices

Semaine 19 : du 11 au 15 février

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Continuité sur un intervalle

- Fonction continue sur un intervalle. Continuité des fonctions usuelles. Stabilité de la continuité par opérations algébriques et composition de fonctions continues. Continuité par morceaux.
- Théorème des valeurs intermédiaires et description de la démonstration par dichotomie. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection et propriétés de la bijection réciproque.
- Théorème des bornes, image d'un segment par une fonction continue.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Rédiger parfaitement les utilisations pratiques du théorème de la bijection (rappel).
— Justifier la continuité globale d'une fonction par opérations et compositions de fonctions usuelles.
— Étudier la continuité globale d'une fonction définie par morceaux (disjonction de cas).
— Justifier l'existence de solutions pour une équation pouvant se ramenant à $f(x) = 0$ avec f continue, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires.

Calcul matriciel

- Vocabulaire : matrice, ligne, colonne, coefficient, matrice nulle. Matrice carrée, triangulaire supérieure ou inférieure, diagonale, identité. Transposition, matrices symétriques et matrices antisymétriques.
- Opérations vectorielles : produit par un réel, somme, combinaisons linéaires, règles de calcul. Produit matriciel, règles de calcul. Transposée d'un produit.
- Calcul de puissances (entières). Définition, règles de calcul, utilisations de la récurrence. Formule du binôme de Newton *sous conditition de commutativité.*
- Inversibilité d'une matrice carrée, unicité de l'inverse, règles de calcul de l'inverse, utilisation d'un polynôme annulateur. Caractérisation des matrices inversibles de taille 2. Liens avec les systèmes linéaires de Cramer et applications : critères pratiques d'inversibilité pour les matrices triangulaires ou diagonales, méthode de Gauss-Jordan, relations de liaison entre les lignes ou les colonnes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Vérifier si une opération matricielle est bien définie en fonction de la taille des matrices en jeu.
— Calculer les coefficients d'un produit de matrices ou d'une petite puissance (carré, cube, etc.)
— Simplifier des expressions algébriques matricielles à l'aide des règles de calcul.
— Appliquer, après *vérification de l'hypothèse*, la formule du binôme matricielle.
— Calculer « à la main » les petites puissances (carré, cube, etc.) d'une matrice, en déduire toutes les puissances à l'aide des règles de calcul ou d'une démonstration par récurrence (selon le cas qui se présente).
— Étudier l'inversibilité d'une matrice carrée particulière : taille 2, diagonale, triangulaire.
— Étudier l'inversibilité d'une matrice à l'aide d'une relation entre ses puissances (polynôme annulateur).
— Étudier l'inversibilité d'une matrice (et calculer son inverse) par la méthode de Gauss-Jordan.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Si f est une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a, b]$, existe-t-il nécessairement un réel $m > 0$ tel que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant m$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$. (Exercice 6 du TD)

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 2A + 3I_n$ est nulle. La matrice A est-elle inversible ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Exprimer B en fonction de A, P, P^{-1} puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N},\ B^k = PA^kP^{-1}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Énoncer et démontrer la caractérisation des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par le « produit en croix ».

Prévisions pour la semaine 20 : matrices, taux d'accroissements