# Colles de mathématiques en E1A

Limites de fonctions

Semaine 18 : du 4 janvier au 9 février

## Nouvelles connaissances exigibles

*Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.*

### Limites de fonctions

- Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ : définitions, limites usuelles, une fonction de limite finie est bornée au voisinage de l'infini. Limites ponctuelles : définitions, limites à gauche, à droite, continuité en un point, prolongement par continuité en un point, caractérisations à l'aide des limites à gauche et à droite, continuité ponctuelle des fonctions usuelles.
- Opérations algébriques sur les limites (finies ou infinies) : sommes et combinaisons linéaires, produits et quotients. Formes indéterminées et croissances comparées en $+\infty$, $-\infty$ et 0. Composition de limites, cas des suites.
- Utilisation d'inégalités : passage à la limite dans les inégalités larges, théorème de comparaison pour les limites infinies, théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »). Limites des fonctions monotones.

*Méthodes essentielles à savoir appliquer :*

— Calculer une limite à l'aide des théorèmes d'opérations et, si nécessaire, des croissances comparées.
— Calculer une limite par composition (ou changement de variable).
— Étudier la continuité en un point d'une fonction définie par morceaux.
— Étudier l'existence d'un prolongement continu pour une fonction en un point où elle n'est pas définie.
— Établir l'existence et la valeur d'une limite à l'aide des théorèmes d'encadrement ou de comparaison.
— En exercice guidé uniquement : limites de taux d'accroissement.

### Continuité sur un intervalle

- Fonction continue sur un intervalle. Continuité des fonctions usuelles. Stabilité de la continuité par opérations algébriques et composition de fonctions continues. Continuité par morceaux.
- Théorème des valeurs intermédiaires et description de la démonstration par dichotomie. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection et propriétés de la bijection réciproque.
- Théorème des bornes, image d'un segment par une fonction continue.

*Méthodes essentielles à savoir appliquer :*

— Rédiger parfaitement les utilisations pratiques du théorème de la bijection (rappel).
— Justifier la continuité globale d'une fonction par opérations et compositions de fonctions usuelles.
— Étudier la continuité globale d'une fonction définie par morceaux (disjonction de cas).
— Justifier l'existence de solutions pour une équation pouvant se ramenant à $f(x) = 0$ avec $f$ continue, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires.

## Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ (Rappel) Quelles sont les allures des graphes et les limites aux bornes des fonctions usuelles suivantes ?

$$x \mapsto x^n, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \ln(x), \quad x \mapsto x^\alpha \quad (\text{avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Énoncer les théorèmes de croissances comparées en $+\infty, -\infty, 0$ et démontrer par composition de limites que : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ (en admettant les résultats en $+\infty$).

$\boxed{\text{Q3}}$ Énoncer le théorème de composition des limites. Si $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, que peut-on dire de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ ? Le démontrer.

$\boxed{\text{Q4}}$ Énoncer le théorème de comparaison (limites infinies). Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies au voisinage de $x_0$ telles que $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et $g$ est minorée, que peut-on en déduire pour $f + g$ ? Le démontrer.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si $f$ est une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a, b]$, existe-t-il nécessairement un réel $m > 0$ tel que : $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant m$ ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que $f$ admet au moins un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$. (Exercice 6 du TD)

## Prévisions pour la semaine 19 : continuité, matrices