Colles de mathématiques en E1A

Limites de fonctions

Semaine 17 : du 28 janvier au 1er février

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Limites de fonctions

- Limites en $+\infty$ et en $-\infty$: définitions, limites usuelles, une fonction de limite finie est bornée au voisinage de l'infini. Limites ponctuelles : définitions, limites à gauche, à droite, continuité en un point, prolongement par continuité en un point, caractérisations à l'aide des limites à gauche et à droite, continuité ponctuelle des fonctions usuelles.
- Opérations algébriques sur les limites (finies ou infinies) : sommes et combinaisons linéaires, produits et quotients. Formes indéterminées et croissances comparées en $+\infty, -\infty$ et 0. Composition de limites, cas des suites.
- Utilisation d'inégalités : passage à la limite dans les inégalités larges, théorème de comparaison pour les limites infinies, théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »). Limites des fonctions monotones.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Calculer une limite à l'aide des théorèmes d'opérations et, si nécessaire, des croissances comparées.
— Calculer une limite par composition (ou changement de variable).
— Étudier la continuité en un point d'une fonction définie par morceaux.
— Étudier l'existence d'un prolongement continu pour une fonction en un point où elle n'est pas définie.
— Établir l'existence et la valeur d'une limite à l'aide des théorèmes d'encadrement ou de comparaison.
— En exercice guidé uniquement : limites de taux d'accroissement.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ (Exercice de TD) Établir, à l'aide d'un système linéaire, la bijectivité de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \longmapsto (3x - y + z, 2x + 2z, x - y + 3z)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ (Rappel) Quelles sont les allures des graphes et les limites aux bornes des fonctions usuelles suivantes ?

$$x \mapsto x^n, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \ln(x), \quad x \mapsto x^\alpha \quad (\text{avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Q3}}$ Si f et g admettent des limites en x_0, que peut-on en déduire pour $f + g$ et $f \times g$? (tableaux)

$\boxed{\text{Q4}}$ Énoncer les théorèmes de croissances comparées en $+\infty, -\infty, 0$ et démontrer par composition de limites que : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ (en admettant les résultats en $+\infty$).

$\boxed{\text{Q5}}$ Énoncer le théorème de composition des limites. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, que peut-on dire de la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$? Le démontrer.

$\boxed{\text{Q6}}$ Énoncer le théorème de comparaison (limites infinies). Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et g est minorée, que peut-on en déduire pour $f + g$? Le démontrer.