Colles de mathématiques en E1A

Polynômes réels, systèmes linéaires

Semaine 16 : du 21 au 25 janvier

Spécificités de la semaine

— Tous les élèves auront à résoudre un système linéaire explicite.
— Tous les élèves auront à effectuer au moins un calcul de division euclidienne.

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Polynômes réels (chapitre 9)

— Fonctions polynomiales, ensemble $\mathbb{R}[X]$, polynôme nul. **Théorème d'identification** : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients. Degré et coefficients d'un polynôme. Somme, différence, produit et puissances de polynômes. **Degré d'un produit**, d'une puissance. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires.

— Racines, factorisation, irréductibilité. Cas des polynômes du second degré : **théorème de factorisation** et relations coefficients–racines. Applications : deuxième racine lorsqu'on connaît déjà l'autre, recherche de deux nombres dont le produit et la somme sont donnés. **Division euclidienne** : théorème et algorithme. **Théorème racine–factorisation** : $a \in \mathbb{R}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ est nul, c'est-à-dire s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$. Majoration du nombre de racines d'un polynôme de degré n.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Factoriser un polynôme du second degré ou montrer qu'il est irréductible.
- Effectuer un calcul de division euclidienne en pratique.
- Trouver une racine « évidente » avec un peu d'astuce.
- Combiner les éléments précédents jusqu'à obtenir une factorisation complète.

Systèmes linéaires (chapitre 10)

— Vocabulaire : équations, inconnues, solutions, système homogène, système de Cramer. Opérations élémentaires sur les lignes : permutations, combinaisons linéaires, opérations composées, réversibilité des opérations.

— Système échelonné. Équations de compatibilité, pivots, rang du système (nombre de pivots). Cas d'un système triangulaire, nombre de paramètres à choisir dans le cas général selon le nombre d'inconnues et le rang.

— Méthode du pivot de Gauss en trois étapes : (a) mise sous forme échelonnée, (b) bilan de la forme échelonnée et mise sous forme triangulaire, (c) mise sous forme diagonale et expression des solutions.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Mettre un système linéaire sous forme échelonnée avec la méthode du pivot.
- Discussion qualitative à partir de la forme échelonnée.
- Application complète de la méthode du pivot.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Énoncer le théorème de la division euclidienne et démontrer l'unicité.

$\boxed{\text{Q2}}$ Démontrer le théorème racine–factorisation (c.f. connaissances exigibles).

$\boxed{\text{Q3}}$ Démontrer le théorème de factorisation des polynômes du second degré (au moins le cas $\Delta > 0$).

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit $(a, b, s, p) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que a et b sont les racines de $X^2 - sX + p$ ssi $\begin{cases} a+b & = s \\ a \times b & = p \end{cases}$

$\boxed{\text{Q5}}$ (Exercice 7 du TD) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Est-il unique ?

$\boxed{\text{Q6}}$ (Exercice 10 du TD) Démontrer, à l'aide d'un système linéaire, la bijectivité de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \longmapsto (3x - y + z, 2x + 2z, x - y + 3z)$.