

Colles de mathématiques en E1A

Indépendance et conditionnement, limites des suites

Semaine 12 : du 10 au 14 décembre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Probabilités, indépendance et conditionnement (chapitres 6 et 7)

- Additivité finie, formule des probabilités totales.
- Évènements élémentaires, caractérisation des probabilités sur un univers fini, équiprobabilité.
- Indépendance de deux évènements. Indépendance mutuelle de n évènements. Schémas de Bernoulli.
- Probabilité conditionnelle sachant qu'un évènement est réalisé.
- Formule des probabilités composées. Formule des Bayes.

Méthodes :

- Appliquer la formule des probabilités totales en décomposant un évènement sur un système complet.
- Étudier l'indépendance de deux évènements en revenant à la définition.
- Calculer la probabilité d'une intersection/union finie d'évènements (mutuellement) indépendants.
- Effectuer les calculs élémentaires de probabilités conditionnelles (révisions de lycée + Bayes)

Limites des suites (chapitre 8)

Partie I. Limites infinies

- Définition des limites infinies $+\infty$ et $-\infty$. Exemples de e^n , $\ln(n)$ et n^α avec $\alpha > 0$.
- Règles de calcul élémentaires de limites infinies : somme ou produit avec une constante, puissance.
- Théorème de comparaison. Application aux limites infinies de sommes ou produits.
- Formes indéterminées, croissances comparées entre $\ln(n)^\alpha$, n^β , $e^{\gamma n}$ pour α, β, γ strictement positifs.
- Divergence des suites croissantes non majorées (ou décroissantes non minorées).

Partie II. Limites finies

- Définition (avec $\varepsilon > 0$). Caractérisation par les intervalles ouverts. Passage à la limite dans les inégalités. Unicité de la limite. Notation \lim .
- Équivalence entre limites infinies et limites nulles par passage à l'inverse. Application aux suites géométriques et retour sur les croissances comparées.
- Théorème d'encadrement (alias « des gendarmes »). Opérations sur les limites de suites convergentes : somme, produit, inverse, quotient. Tableaux des limites finies/infinies avec formes indéterminées.

Méthodes :

- Calculer une limite de suites usuelles avec opérations.
- Éliminer une forme indéterminée par mise en facteur puis simplification des termes dominants.
- Justifier la convergence ou la divergence d'une suite par encadrement ou comparaison.

Questions de cours suggérées

- Q1 Qu'est-ce que la formule des probabilités totales? Quelles sont ses hypothèses? La démontrer dans le cas du système complet (A, \bar{A}) (mini-formule).
- Q2 Si A et B sont deux évènements indépendants, que peut-on dire de A et \bar{B} ? Le démontrer.
- Q3 Si (A_1, \dots, A_n) sont des évènements mutuellement indépendants de même probabilité $p \in [0; 1]$, quelle est la probabilité qu'au moins un des (A_i) se réalise? Le démontrer. (Schémas de Bernoulli)
- Q4 Énoncer la formule des probabilités composées pour un nombre fini quelconque d'évènements.
- Q5 Quelle est la définition de « (u_n) diverge vers $+\infty$ »? Montrer que $\ln(n) \rightarrow +\infty$.
- Q6 Énoncer le théorème des croissances comparées, puis calculer une limite du type : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 e^n - \ln(n) e^{2n})$.
- Q7 Quelle est la définition de « (u_n) converge »? Énoncer la caractérisation avec les intervalles ouverts.
- Q8 Énoncer le théorème d'encadrement. Quel est son intérêt par rapport au théorème de passage à la limite dans les inégalités?

Interruption des colles jusqu'au 14 janvier!