Colles de mathématiques en E1A

Probabilités sur un ensemble fini, indépendance et conditionnement

Semaine 11 : du 3 au 7 décembre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Applications entre ensembles (chapitre 5)

— Dénombrement et applications. Principe bijectif, principe des choix successifs. Exemples importants : p-listes, p-arrangements, permutations, lien avec les coefficients binomiaux.

Méthodes :

- Effectuer un dénombrement par choix successifs.

Théorie élémentaire des probabilités (chapitre 6)

— Formalisme des évènements : univers, issue, évènements.

— Interprétation des opérations ensemblistes, évènements incompatibles, systèmes complets.

— Probabilité uniforme. Définition d'une probabilité sur un univers fini et conséquences : (mini-)formule des probabilités totales pour deux évènements, probabilité complémentaire, croissance.

— Formules du crible pour deux ou trois évènements.

Méthodes :

- Modéliser une expérience par un univers fini explicite.
- Expliciter un évènement décrit en langage naturel, en listant ses issues.
- Exprimer un évènement du type « pour tout [...] » ou « il existe [...] » à l'aide d'opérations ensemblistes et d'une famille d'évènements de base.
- Reconnaître une situation de tirage « au hasard » relevant d'une probabilité uniforme, et calculer la probabilité d'un évènement par dénombrement.
- Calculer une probabilité en raisonnant sur les évènements (complémentaire, formule du crible, etc.)

Indépendance et conditionnement (chapitre 7)

— Additivité finie, formule des probabilités totales.

— Évènements élémentaires, caractérisation des probabilités sur un univers fini, équiprobabilité.

— Indépendance de deux évènements. Indépendance mutuelle de n évènements. Schémas de Bernoulli.

— Probabilité conditionnelle sachant qu'un évènement est réalisé.

— Formule des probabilités composées. Formule des Bayes.

Méthodes :

- Appliquer la formule des probabilités totales en décomposant un évènement sur un système complet.
- Étudier l'indépendance de deux évènements en revenant à la définition.

- Calculer la probabilité d'une intersection/union finie d'évènements (mutuellement) indépendants.
- Effectuer les calculs élémentaires de probabilités conditionnelles (révisions de lycée + Bayes)

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont des évènements, comment s'interprètent les évènements suivants ?

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}. \qquad \text{(lesquels sont égaux ?)}$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Définir la notion de système complet d'évènements, en détaillant les deux conditions.

$\boxed{\text{Q3}}$ Définir la notion de probabilité sur un univers fini. Qu'est-ce qu'un espace probabilisé ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Qu'est-ce que la formule des probabilités totales ? Quelles sont ses hypothèses ? La démontrer dans le cas du système complet $(A, \overline{A})$ (mini-formule).

$\boxed{\text{Q5}}$ Si A et B sont deux évènements indépendants, que peut-on dire de A et $\overline{B}$? Le démontrer.

$\boxed{\text{Q6}}$ À quelles conditions des évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont-ils mutuellement indépendants ? L'indépendance est-elle préservée si certains de ces évènements sont remplacés par leur complémentaire ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont des évènements mutuellement indépendants de même probabilité et $p \in [0; 1]$, quelle est la probabilité qu'au moins un des (A_i) se réalise ? Le démontrer.

$\boxed{\text{Q8}}$ Énoncer la formule des probabilités composées pour un nombre fini quelconque d'évènements.

Prévisions pour la semaine suivante : limites des suites