

Colles de mathématiques en E1A

Applications entre ensembles, probabilités

Semaine 10 : du 26 au 30 novembre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Applications entre ensembles (chapitre 5)

- Conditions pour qu'une fonction définisse une application. Composition de deux applications, associativité. Injectivité, surjectivité, traductions en termes d'équations ou d'antécédents, exemples.
- Bijektivité, traductions en termes d'équations ou d'antécédents, notation f^{-1} . Applications réciproques, formulations équivalentes, réciproque d'une composée de bijections.
- Dénombrement et applications. Principe bijectif, principe des choix successifs. Exemples importants : p -listes, p -arrangements, permutations, lien avec les coefficients binomiaux.

Méthodes :

- Justifier qu'une application est bien définie d'un ensemble A vers un ensemble B .
- Montrer l'injectivité ou la surjectivité d'une application en vérifiant la définition.
- Résoudre une équation pour établir la bijectivité d'une application et expliciter sa réciproque.
- Effectuer un dénombrement par choix successifs.

Théorie élémentaire des probabilités (chapitre 6)

- Formalisme des évènements : univers, issue, évènements.
- Interprétation des opérations ensemblistes, évènements incompatibles, systèmes complets.
- Probabilité uniforme. Définition d'une probabilité sur un univers fini et conséquences : (mini-)formule des probabilités totales pour deux évènements, probabilité complémentaire, croissance.
- Formules du crible pour deux ou trois évènements.

Méthodes :

- Modéliser une expérience par un univers fini explicite.
- Expliciter un évènement décrit en langage naturel, en listant ses issues.
- Exprimer un évènement du type « pour tout [...] » ou « il existe [...] » à l'aide d'opérations ensemblistes et d'une famille d'évènements de base.
- Reconnaître une situation de tirage « au hasard » relevant d'une probabilité uniforme, et calculer la probabilité d'un évènement par dénombrement.
- Calculer une probabilité en raisonnant sur les évènements (complémentaire, formule du crible, etc.)

Questions de cours suggérées

- Q1 Définir *injection*, puis montrer que la composée de deux injections est une injection (exercice corrigé).
- Q2 Définir *surjection*, puis montrer que la composée de deux surjections est une surjection (exercice corrigé).
- Q3 Pour des applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$, à quelles conditions a-t-on f bijective et $g = f^{-1}$? Donner deux caractérisations en termes d'applications réciproques et de résolution d'équation.
- Q4 La composée de deux bijections admet-elle une réciproque? Le démontrer par composition.
- Q5 Si (A_1, \dots, A_n) sont des évènements, comment s'interprètent les évènements suivants?
- $$\bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i, \quad \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}. \quad (\text{lesquels sont égaux?})$$
- Q6 Définir la notion de système complet d'évènements, en précisant les conditions.
- Q7 Définir la notion de probabilité sur un univers fini. Qu'est-ce qu'un espace probabilisé?
- Q8 Énoncer et démontrer la (mini-)formule des probabilités totales pour deux évènements.

Prévisions pour la semaine suivante

- Additivité finie, formule des probabilités totales.
- Évènements élémentaires, caractérisation des probabilités sur un univers fini, équiprobabilité.
- Indépendance de deux évènements.
- Indépendance mutuelle de n évènements.
- Schémas de Bernoulli.
- Probabilité conditionnelle sachant qu'un évènement est réalisé.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des Bayes.