Variables aléatoires réelles à densité
Exercices

E1A 2016-2017

Fonction de répartition et densité

I Soit $\alpha > 0$ et soit X une v.a.r. telle que : $\forall t > 1,\ \mathbb{P}(X > t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$.

a. Justifier l'existence d'une telle variable aléatoire. (*Que dire de F_X ?*)

b. Montrer que X admet une densité, et en donner une expression.

c. À quelle condititon X admet-elle une espérance ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ dans ce cas.

II Soit $a > 1$. On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x + \ln x}{x^2}, & \text{si } x \in [1, a] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel $a > 1$ tel que f soit une densité de probabilité.

b. Si X est une variable de densité f, quelle est son espérance ? Sa variance ?

III **(Loi de Laplace)** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité.

b. Soit X une v.a.r. de densité f. Expliciter sa fonction de répartition F_X.

c. La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

d. Déterminer la loi de $Y = |X|$ en calculant sa fonction de répartition. La variable aléatoire Y admet-elle une densité ? Si oui, en expliciter une.

Transformation affine des lois usuelles

IV Soient $\alpha > 0$ un réel, et X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(1)$. Reconnaître la loi de αX.

V Clotho fabrique un fil long de 1 mètre, Atropos le coupe au hasard, Lachésis mesure les longueurs X et Y des deux morceaux obtenus. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on note Z la longueur du plus grand morceau.

a. Reconnaître la loi de Y à l'aide d'une transformation affine.

b. Justifier que $\mathbb{P}([Z \leq \frac{1}{2}]) = 0$. Plus généralement, déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Z. La loi de Z est-elle uniforme sur $[\frac{1}{2}, 1]$?

c. En moyenne, quelle est la longueur du plus petit morceau ? Quelle est la probabilité pour que le petit morceau mesure moins de la moitié du grand ?

VI Soient U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Déterminer deux réels a et b tels que $W = aU + b$ suit la loi $\mathcal{U}([\alpha, \beta])$.

Méthode d'inversion

VII **(Cas de la loi exponentielle)** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $\lambda > 0$.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$.

b. En déduire une fonction *Scilab* permettant de simuler la loi exponentielle.

VIII **(Cas général)** Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F est *continue* et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que F définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

b. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

c. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Montrer que $Z = F^{-1}(U)$ a la même loi que X.

Loi normale

IX **(Transformations)** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$.

b. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

c. Déterminer la loi de $Z = -X$.

X **(Loi log-normale)** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$. Montrer que $Y = \mathrm{e}^X$ admet une densité et calculculer son espérance.

XI Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0; 1)$ et soit $\forall x \in [1, +\infty[$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathbb{P}([X > x]) \leqslant \dfrac{1}{x}\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

b. Prouver de même que l'on a : $\mathbb{P}([X > x]) \geqslant \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

c. En déduire un équivalent de $\mathbb{P}([X > x])$ lorsque $x \to +\infty$.