Variables aléatoires réelles (exercices)

E1A 2016–2017

Dans toute cette feuille, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et F la fonction de répartition de X.

Exercice I. Échauffement sur les fonctions de répartition

1. Soit x un réel tel que $x \notin X(\Omega)$. Que vaut $\mathbb{P}([X = x])$?
2. Montrer que pour tout a réel, $\mathbb{P}([X > a]) = 1 - F(a)$.
3. On suppose dans cette question que $\mathbb{P}(2016 < X \leq 2017) = 1$.
   (a) Calculer les nombres $F(2017), F(2016), F(2018), F(2015)$.
   (b) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $I \cap]2016, 2017] = \emptyset$. Que vaut $\mathbb{P}([X \in I])$?

Exercice II. Indicatrice d'un évènement et loi de Bernoulli

Pour tout évènement $E \in \mathscr{A}$, on note $\mathbf{1}_E : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathbf{1}_E(\Omega)$ dans les trois cas suivants : $E = \Omega$, $E = \emptyset$, puis $E \notin \{\emptyset, \Omega\}$.
2. Soit t un réel. Exprimer l'ensemble $[\mathbf{1}_E \leq t]$ en fonction de t, à l'aide des évènements $\emptyset, E$ ou Ω.
3. En déduire que $\mathbf{1}_E$ est une variable aléatoire réelle discrète finie.
4. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_E$?

Exercice III. Interprétation de la loi binomiale

Soit $p \in [0, 1]$, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements *mutuellement indépendants* tels que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(A_i) = p$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega)$ le nombre d'évènements réalisés, c'est-à-dire : $X(\omega) = \operatorname{Card}(\{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega \in A_i\})$.

1. Montrer que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
2. Exprimer les évènements $[X = n]$ et $[X = 0]$ à l'aide de $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En déduire $\mathbb{P}([X = n])$ et $\mathbb{P}([X = 0])$.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien existe-t-il de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k ?
   Soit S un tel sous-ensemble. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $B_i = A_i$ si $i \in S$ et $B_i = \overline{A_i}$ si $i \notin S$. Montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = p^k (1-p)^{n-k}.$$
4. En déduire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
5. *Application.* On lance 10 fois un dé à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 6 fois ⚀ ou ⚁ ?

Exercice IV. Limites à gauche de la fonction de répartition

Soit x_0 un réel quelconque.

1. Rappeler sans démonstration les propriétés de la fonction F.
2. Justifier l'existence d'un réel ℓ, limite à gauche de F en x_0. Puis prouver que $F(x_0 - \frac{1}{n})$ tend vers ℓ lorsque $n \to \infty$.
3. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[X \leq x_0 - \frac{1}{n}\right] = [X < x_0]$. Déduire de ce qui précède l'égalité : $\mathbb{P}([X < x_0]) = \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} F(x)$.
4. Montrer que F est continue en x_0 si et seulement si $\mathbb{P}([X = x_0]) = 0$.
5. Si X est une variable aléatoire discrète, à quelle condition F est-elle continue ?