Séries de nombres réels
Exercices

E1A 2016-2017

Nature d'une série

I Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum_n \dfrac{1}{n^2-n}$

b. $\sum_n \dfrac{1}{e^n+e^{-n}}$

c. $\sum_n \dfrac{1}{n^4-3^n}$

d. $\sum_n \ln\left(\dfrac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$

e. $\sum_n \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3-5n+1}}$

f. $\sum_n \dfrac{\ln n}{2^n}$

g. $\sum_n \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

h. $\sum_n \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$

Calcul de sommes par télescopage

II **a.** Montrer que pour $k>0$: $0 \leqslant \ln(k+1)-\ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b. En déduire une minoration de $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$ puis la nature de $\sum_k \dfrac{1}{k}$.

III On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

a. Quelle est la nature de cette série ?

b. Calculer sa somme.

$\left(\textit{on pourra mettre } u_n \textit{ sous la forme } \; u_n = \dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{n+2}+\dfrac{c}{n+3}\right)$

IV Calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

Réponse. La factorisation $4n^2-1=(2n-1)(2n+1)$ conduit, par décomposition en éléments simples, à :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n+1)-1}\right).$$

Par simplifications téléscopiques, on obtient donc pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2(N+1)-1}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

La série est donc convergente, et sa somme est $\dfrac{1}{2}$.

Remarque : en faisant commencer la série à $n=0$, on trouverait $-\dfrac{1}{2}$.

V On considère la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = e^{-a_n}\, a_n \end{cases}$$

a. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

b. On pose $b_n = \ln a_n$. Calculer $b_{n+1}-b_n$ en fonction de a_n.

c. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Réponse.

a. C'est une **question classique** qu'on résout en étudiant la monotonie de la suite.

(α) *Stabilité.* Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$:
— Si $n=0$, on a $a_n = a_0 > 0$ par hypothèse.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_n > 0$. Alors $a_{n+1} = e^{-a_n}a_n > 0$ par produit de réels strictement positifs (rappelons que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$).
Le principe de récurrence permet de conclure.

(β) *Monotonie.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $a_n > 0$, donc $e^{-a_n} < 1$, et donc $a_{n+1} < a_n$ car $a_{n+1} = e^{-a_n}a_n$ et $a_n > 0$. Ainsi, (a_n) est strictement décroissante.

(γ) *Existence de la limite.* La suite (a_n) est décroissante et minorée par le réel 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers un réel ℓ tel que $\ell \geq 0$.

(δ) *Identication de la limite.* On sait que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, donc on a aussi par composition : $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$. De plus, $\lim_{n\to\infty} e^{-a_n}a_n = e^{-\ell}\ell$ par continuité. On en déduit que $\ell = e^{-\ell}\ell$ par unicité de la limite, d'où $\ell(e^{-\ell}-1)=0$. Ainsi $\ell = 0$ ou $e^{-\ell}=1$: on obtient dans les deux cas $\ell = 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de (b_n), on peut écrire :

$$b_{n+1} - b_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(e^{-a_n}\right) = -a_n.$$

c. Remarquons déjà que $\sum a_n$ et $\sum(-a_n)$ sont de même nature. Par sommation télescopique, on sait que la série $\sum(-a_n)$ est convergente si et seulement si la suite (b_n) converge. Or $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = -\infty$ par composition. Ainsi, la suite (b_n) diverge, donc $\sum a_n$ est divergente.

VI On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

a. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

b. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

c. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

d. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Calcul de sommes par linéarité

VII On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Séries à termes de signe constant

VIII Soit (u_n) une suite à termes négatifs : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$.
On considère la série $\sum u_n$ et (S_n) la suite des sommes partielles associées.

a. Déterminer la monotonie de (S_n).

On considère maintenant une suite (v_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \leqslant 0$.

b. Montrer que : $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge.

c. Montrer que : $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge.

IX **a.** Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.

b. On considère (x_n) une suite de réels positifs tel que : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Montrer que si $\sum_n x_n$ converge, alors $\sum_n x_n^2$ converge.

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

X Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de x, dans les questions où un x intervient).

a. $\sum \frac{7}{2^{2n-5}}$

b. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c. $\sum \frac{n}{2^n}$

d. $\sum n^2 x^n$

e. $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$

f. $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$

g. $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$

h. $\sum \frac{n-1}{3^n}$

i. $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$

j. $\sum \frac{3(-2)^n}{n!}$

k. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

l. $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$

m. $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$

n. $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$

Reste d'une série

XI On considère une série $\sum_n u_n$ que l'on suppose *convergente*.
On appelle **reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$ et on note R_n la quantité :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

a. Cette quantité est-elle bien définie ?

b. Écrire la quantité R_n en fonction de S, somme de la série $\sum u_n$ et de S_n, somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.

c. En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Sujet de concours

XII On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

a. Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
On pose pour tout entier n :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

d. Montrer que v_n est strictement négatif.

e. Montrer que la suite (v_n) est convergente de limite nulle.

f. Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

g. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra que :

$$\forall x \in [0,1],\ -x^2 \ \leqslant\ \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} - 1 \ \leqslant\ -\frac{x^2}{4} \ \leqslant\ 0$$

h. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

i. En utilisant le résultat de l'exercice IX, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Énigme

XIII Les 197 premières décimales de $\dfrac{1}{9801}$ sont :

$$0,00\,01\,02\,03\,04\,05\,06\,07\,08\,09\ldots 95\ 96\,97$$

Est-ce une coïncidence ? Quelles sont les 10 décimales suivantes ?
Comment peut-on obtenir $0,00\,01\,04\,09\,16\,25\,36\,49\,64\ldots$?