Suites usuelles
Exercices

E1A 2016-2017

Suites classiques

I Pour chacune des suites suivantes, définies par récurrence, donner une expression explicite de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

b. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

c. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

d. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$.

e. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

II Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que (a_n) est arithmétique si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

III On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

IV On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

V On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

b. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$.
Justifier que (v_n) est bien définie.

c. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

d. En déduire une formule explicite de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

VI Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie.

b. Calculer v_n et déduire la valeur de u_n.

VII On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Donner une expression explicite de u_n. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

VIII Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.

c. Exprimer w_n en fonction de n.

d. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

e. Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

IX Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire (t_n) de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Montrer que (t_n) est une suite géométrique.

b. En déduire une expression de t_n puis de u_n.

X Quatre réels a, b, c et q vérifient :

(i) Les nombres a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

(ii) Les nombres a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q.

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

XI On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.

b. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est d'un type bien connu, en déduire la valeur de z_n et celle de u_n.

XII (astucieux) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$$

Déterminer une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

XIII Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

XIV Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

XV

a. Existe-t-il une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n)$?

b. Existe-t-il une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} - 1$?

XVI On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{2+u_n} \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Suites définies à l'aide du symbole $\prod$

XVII On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1} \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall k \geq 2,\ u_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \times u_{k-1}$.

b. Démontrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n = u_1 \times \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

En déduire une formule explicite de la suite (u_n).

c. Démontrer que : $\forall n \geq 2, u_n = n + 1$.

Cette question devra être traitée sans se servir des résultats précédents.

XVIII On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)u_k \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

b. Démontrer que : $\forall k \geq 2,\ u_k = (1+k)u_{k-1}$.

c. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)$.

En déduire une formule explicite de la suite (u_n).

d. Démontrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n = (n+1)!$

Cette question devra être traitée sans se servir des résultats précédents. On pourra se servir du fait que : $(k+1) = ((k+2) - 1)$