Étude des suites réelles
Exercices

E1A 2016-2017

Suites bornées, suites monotones

I Soit (u_n) une suite telle que : $\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M$.

a. Donner la négation de cette propriété.

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée. On exhibera l'un de ses majorants.

II **a.** La suite $(1 - \frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? minorée ?

b. Répondre aux mêmes questions dans le cas de la suite $(1 + \frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

III Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ **b.** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$

Définition de la convergence

IV Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers un réel $\ell > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n est strictement positif.

V *Quelques démonstrations du cours ...*

a. On suppose que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.
Montrer que $u_n v_n$ tend vers 0.

b. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ'.
Montrer que $(u_n - \ell)(v_n - \ell')$ tend vers 0 et en déduire la limite de $u_n v_n$.

c. On suppose $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) et $u_n \to 0$.
Montrer que $1/u_n \to +\infty$.

d. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $1/u_n \to 0$.

VI Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux convergentes de limite ℓ. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

VII *Vrai ou Faux ?*

a. Si u_n tend vers $+\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.

b. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

c. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.

d. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

e. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

f. Une suite convergente et majorée est croissante.

g. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

h. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.

i. Une suite strictement décroissante diverge vers $-\infty$.

j. Si (u_n) est croissante et $u_n \leq v_n$ alors (v_n) est croissante.

k. Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors u_n/v_n tend vers 0.

l. Si (u_n) est divergente, alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est divergente.

m. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = 1$.

Calculs de limites

VIII

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - 3n^7 + 5n - n^3}{n^2 + 1}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n\ n^2 + 3n}{n^2 + \sqrt{n}}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}} + 2}{e^{\ln n + 3} - 5}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 e^n - n e^{2n}}{n^3 \ln n - n\,(\ln n)^3}$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln n + 5}$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - 5n\sqrt{n} + n - \ln n + n^{-1}}{e^{3n} - e^n + 1 - e^{-n}}$

g. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + 2} - n$

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}$

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

j. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\ e^{-3n}$

k. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

IX

a. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

b. $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

c. $\lim_{n\to+\infty}(2n-3)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

d. $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

X Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n=\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$. Calculer sa limite.

Grands théorèmes de convergence

XI
Soit la suite définie par $u_n=\dfrac{5^n}{n!}$ pour tout $n\geq 0$.

a. Calculer les cinq premiers termes. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de $n=4$.

c. Montrer que pour $n\geq 5$, $u_{n+1}\leq\dfrac{5}{6}\,u_n$.

d. Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_5=u_5$ et de raison $\dfrac{5}{6}$. Montrer que pour tout $n\geq 5$, on a $0\leq u_n\leq v_n$.

e. Déterminer la limite de (u_n).

XII On considère la suite (S_n) définie pour $n\geq 1$ par : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour $n\geq 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b. En déduire la limite de la suite (S_n).

c. On pose $T_n=S_n-2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de la limite monotone que (T_n) converge.

d. Exhiber alors une suite (u_n) tel que : $\dfrac{S_n}{u_n}\underset{n\to\infty}{\to}1$.

XIII

a. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n!}\leq\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. Démontrer que la suite (S_n) de terme général $S_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ converge vers un réel $\ell\in\,]2,3]$.

XIV *D'après* `EDHEC 2001`

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}\end{cases}$

a. Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

b. En déduire que (u_n) est monotone.

c. Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2-{u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

d. En déduire que pour tout $n>0$: ${u_n}^2=2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{{u_k}^2}$.

e. En déduire que pour n non nul, ${u_n}^2\geq 2n+1$ puis la limite de (u_n).

Suites adjacentes

XV On considère la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite (S_n) converge.

XVI On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\quad\text{et}\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\,n!}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

XVII Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & \text{et} & v_0 = 11\\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} = \dfrac{u_n+3v_n}{4}\end{cases}$$

a. Étudier la suite (v_n-u_n). Calculer son terme général en fonction de n, quel est son signe ? Donner sa limite.

b. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

c. Étudier la suite (u_n+v_n). Que conclure ?