Récurrence, sommes et produits
Exercices

E1A 2016-2017

Récurrence

I Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

II Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

III Notons (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa valeur et démontrer cette conjecture par récurrence.

IV Soit (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

V Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

VI Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

a. $\forall n \geq 4,\ 2^n \leq n!$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$

c. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

VII Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ P(k) = a_k$.

Sommes finies : manipulations d'indices

VIII Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)\sqrt{n-k} \ = \ \sum_{i=0}^{n-1}(n-i+1)\sqrt{i}$

IX

a. Soient a et b deux réels. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

b. Donner de même une factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

X Développer $(i+1)^3 - i^3$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, puis en déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

XI

a. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

b. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

Sommes usuelles

XII Calculer les sommes suivantes.

a. $\sum\limits_{k=5}^{11} k$

b. $\sum\limits_{k=9}^{125} k$

c. $\sum\limits_{i=5}^{11} x$

d. $\sum\limits_{i=5}^{11} (3+5i)$

e. $\sum\limits_{k=5}^{11} \dfrac{2^k}{3}$

f. $\sum\limits_{k=3}^{125} \dfrac{48}{2^k}$

g. $\sum\limits_{k=5}^{11} \dfrac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$

h. $\sum\limits_{k=5}^{11} \dfrac{3^k}{2^{2k}}$

XIII Calculer les sommes suivantes.

a. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

b. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$

c. $\sum_{k=1}^{n}5^{2k}$

d. $\sum_{k=823}^{2012}7$

e. $\sum_{k=1}^{n}k(2k^2-1)$

f. $\sum_{k=0}^{n}(2^k+k^2+2)$

g. $\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$

h. $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{4^k}$

i. $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}}$

XIV Démontrer les résultats suivants.

a. $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^3=2n^4-n^2$

c. $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}kq^k=\frac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{n+1}-(n+1)q^n+1\right)$

XV Calculer les produits suivants.

a. $\prod_{k=0}^{n}3$

b. $\prod_{k=1}^{n}(2k)$

c. $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$

d. $\prod_{k=0}^{n}q^k$

e. $\prod_{k=0}^{n}q^{2^k}$

XVI Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $q\neq 1$.

On définit la suite de terme général $u_n=\sum_{k=1}^{n}k.q^k$.

On définit la fonction $f_n:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$.

Le but de cet exercice est de démontrer de manière directe le dernier point de l'exercice XIV.

a. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n par rapport à la variable x.

b. En déduire une relation entre u_n et $f_n'(q)$.

c. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

d. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.

e. En déduire le résultat souhaité.

Sommes doubles

XVII Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq p}}a_ib_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{p}b_i\right)$$

XVIII Soient $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}a_{ij}\right)$$

XIX Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i+j=k}a_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n-i+1}a_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n-j+1}a_{i,j}\right)$$

XX Calculer les sommes doubles suivantes.

a. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\right)$

b. $\sum_{1\leq i,j\leq n}ij$

c. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}ij$

d. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j}$

e. $\sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j|$

f. $\sum_{1\leq i,j\leq n}i2^j$

XXI Calculer les sommes et produits suivants (avec $a\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$).

a. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$

b. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j)$

c. $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$

d. $\sum_{1\leq i,j\leq n}a^{i+j}$

e. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a^{i+j}$

f. $\sum_{k=0}^{n}\exp(kx)$

XXII Soit $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$$