Propriétés globales des fonctions
Exercices

E1A 2016-2017

Parité

I Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

a. Si f et g sont paires, que peut-on dire de : $f+g$, $f-g$, $f\times g$?

b. Même question si f et g sont impaires.

c. Même question si f est paire et g impaire.

II Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bijective.

a. Montrer que f n'est pas paire. Est-elle nécessairement impaire ?

b. Si f est impaire, montrer que sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.

III Soient I et J deux intervalles symétriques de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J, telles que $f(I)\subset J$.

a. Montrer que : f paire $\Rightarrow$ $g\circ f$ paire.

b. Montrer que : f et g impaires $\Rightarrow$ $g\circ f$ impaire.

c. Montrer que : f impaire et g paire $\Rightarrow$ $g\circ f$ paire.

IV Soit $f:x\mapsto\sum_{i=0}^{d}a_ix^i$ une fonction polynomiale.

a. Montrer que f est paire si et seulement si pour tout $i\in[\![0,d]\!]$ impair, $a_i=0$.

b. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que f soit impaire.

Majoration, minoration, extrema

V Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction monotone définie sur un intervalle I.

a. Montrer que si I est un segment, alors f admet un maximum et un minimum.

b. Posons $I=[0,1[$. Montrer que f est bornée si et seulement si f admet une limite finie en 1. Existe-t-il alors nécessairement un maximum ?

VI Soit $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble D fini non vide. Montrer, par récurrence sur $\mathrm{card}(D)$, que f admet un maximum et un minimum.

Théorème des valeurs intermédiaires

VII Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

VIII Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution :

a. $\ln x=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ d'inconnue x dans $[1,10]$.

b. $x^{2017}-x^{2016}=-1$ d'inconnue x dans $[-1,1]$.

c. $x^n+9x^2-4=0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}_+^*$ (n est un entier positif).

d. $x\ln x=2$ d'inconnue x dans $[2,3]$.

IX Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x\in I,\ |f(x)|=2017$. Montrer que f est constante.

X Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que $f(I)\subset\mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

XI Soit f une fonction continue définie sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.
Montrer que f admet un point fixe : $\exists x_0\in[0,1],\ f(x_0)=x_0$.

XII Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=f(1)$.
Montrer qu'il existe $(x,y)\in[0,1]^2$ tels que $|x-y|=\frac{1}{2}$ et $f(x)=f(y)$.

XIII Soit $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0)=g(1)=0\quad\text{et}\quad f(1)=g(0)=1$$

Montrer que : $\forall\lambda\geq 0,\ \exists x_0\in[0,1],\ f(x_0)=\lambda\,g(x_0)$.
(on pourra considérer la fonction $h:x\mapsto f(x)-\lambda\,g(x)$)

Continuité sur un segment

XIV Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$.

Montrer que f est bornée dans $\mathbb{R}$.

XV Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $f(0)=1$. Montrer que f est bornée et admet un maximum.
Admet-elle nécessairement un minimum ?

XVI Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas.
Montrer qu'il existe $m>0$ tel que pour tout $x\in[0,1],\ |f(x)|\geq m$.

Théorème de la bijection

XVII On considère la fonction $f : x \mapsto -2 + x - \ln x$.

a. Faire l'étude de la fonction f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.

XVIII On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Montrer que f réalise une bijection de son domaine D_f (à déterminer !) sur lui-même. *On démontrera avec soin que f est continue sur D_f.*

XIX On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ puis déterminer son signe.
Pour ce faire, on pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ définie pour $x > -1$.

c. Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[-1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

d. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

e. Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
On pourra utiliser le fait que : $\ln 2 \approx 0,69$ *et* $\ln 5 \approx 1,61$.

Suites définies implicitement

XX Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

a. Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

c. Calculer u_1.

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

e. En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

f. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

g. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f_n(x) = \dfrac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$.

h. En déduire que : $2\,u_n - 1 = u_n^{n+1}$.

i. Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n).

XXI Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$

a. Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer les limites de f_n quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

d. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On notera u_n cette solution.

e. Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

f. En déduire la limite de la suite (u_n).

g. En revenant à la définition de u_n, montrer que : $n\,u_n \to -\dfrac{1}{2}$.

Théorème de la limite monotone

XXII Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. On souhaite démontrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$ (on dit que c est un point fixe). Pour ce faire, on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

a. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

b. En déduire que f admet un point fixe.

c. En procédant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.

XXIII Posons $I =]0, 1[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(I)$ est un intervalle. On souhaite démontrer que la fonction f est continue.

a. Soit $a \in I$. Montrer que si f n'est pas continue en a, alors il existe deux réels ℓ_g et ℓ_d avec $f(0) \leq \ell_g < \ell_d \leq f(1)$ tels $f(I) \cap]\ell_g, \ell_d[= \emptyset$.

b. En déduire que f est continue sur I.

c. Le résultat est-il valable si f est décroissante ?

Remarque. Ce résultat est la brique manquante de la démonstration du théorème de la bijection présentée dans le cours.