Calcul matriciel
Exercices

E1A 2016-2017

Manipulations de base sur les matrices

I Parmi ces matrices, lesquelles sont triangulaires supérieures ? Inférieures ? Diagonales ? Inversibles ?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ **g.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **h.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

II On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$.

b. Calculer $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

c. Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III Calculer LC et CL, où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$.

b. Même question pour $T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Produit de matrices via la formule du cours (définition)

V Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $S(A)$ la somme des termes de A.
On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = (1)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Vérifier que : $J \times A \times J = S(A) \cdot J$.

VI Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient i, j dans $[\![1,n]\!]$.
On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a. Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i=j$ et 0 sinon)

Équations matricielles

VII Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(*i.e.* l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $AM = MA$)

VIII On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A.

IX On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

b. Déterminer toutes les matrices $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Matrices symétriques, transposée

X Soient $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Démontrer que ${}^t(C \times D) = {}^tD \times {}^tC$.

XI On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}$$

a. Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.

b. Montrer que $A\,{}^tA$ est symétrique pour toute matrice A.

c. Soient A, B deux matrices symétriques.

- **a.** Montrer que : AB est symétrique $\Leftrightarrow$ $AB = BA$
- **b.** Que dire si elles sont antisymétriques ?
- **c.** Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice

XII Pour toute matrice carrée $A=(a_{ij})$, de taille $n\times n$, on appelle *trace* de A, et on note $tr(A)$, le nombre $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$.

a. Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $tr(I_n)$ et $tr(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$?

b. Démontrer que $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$, pour $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Démontrer que $tr(AB)=tr(BA)$, pour $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. En déduire que l'équation $AB-BA=I$, d'inconnues $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'a pas de solution.

XIII Trouver toutes les matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $tr(A\,{}^tA)=0$.

Inverse d'une matrice A

XIV **a.** Soit A une matrice inversible.
Démontrer que l'inverse de A est définie de manière unique.

b. Soient A et B deux matrices carrées inversibles.
Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

c. Soient A et B deux matrices carrées non nulles, vérifiant $AB=0$.
Montrer que ni A ni B n'est inversible.

d. Donner un exemple de matrices carrées A et B non nulles tq : $AB=0$.

XV Soit $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

a. B admet une inverse à gauche : $\exists A_1\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A_1B=I_n$.

b. B admet une inverse à droite : $\exists A_2\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ BA_2=I_n$.

Montrer que $A_1=A_2$.

Obtention de l'inverse de A par une relation $AB=I_n$

XVI On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et vérifier que $A^2=2\,I_3-A$.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

XVII On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^3-A.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

XVIII On considère les matrices suivantes A et B suivantes.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3-A^2-A+I=0$.

b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

c. Montrer que $B^3-3B^2+2B=0$.

d. En déduire que B n'est pas inversible.

XIX Soit $a\in\mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A^2-A-2I=0$.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

XX Soit $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB=A+I_n$.

a. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b. En déduire que : $AB=BA$.

Calcul d'inverse par pivot de Gauss

XXI Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

a. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **d.** $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Puissance m^{e} par récurrence

XXII On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=A-2I$.

a. Montrer que $B^2=3B$.

b. En déduire par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=2^nI+\dfrac{5^n-2^n}{3}B$.

Puissance m^{e} par la formule du binôme

XXIII On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer (simplifier !) A^n par la formule du binôme.

XXIV On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $(A - I)^2 = 0$.

b. En utilisant le fait que $A = (A - I) + I$, calculer A^n pour $n \geq 2$.

XXV On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer M^n pour tout entier n.

XXVI Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

a. Montrer que si P est inversible, alors $P = I$.
Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.

b. Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.

c. Montrer que $PQ = QP = 0$.

d. Calculer $(I + P)^n$, pour tout entier naturel n.

Puissance m^{e} de matrices et suites définies par récurrence

XXVII On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.

c. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
Reconnaître les suites (α_n) et (β_n).

d. En déduire u_n et v_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

XXVIII On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

a. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b. Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geq 0$.

c. Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

XXIX On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier que $Q = P^{-1}$.

b. Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n.

c. Montrer que $\forall n \geq 0,\ A^n = PD^nQ$.
En déduire les coefficients de A^n.

d. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n suivant n.