Calcul matriciel
Exercices

E1A 2016-2017

Manipulations de base sur les matrices

I Parmi ces matrices, lesquelles sont triangulaires supérieures ? Inférieures ? Diagonales ? Inversibles ?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ **g.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **h.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

II On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$.

b. Calculer $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

c. Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III Calculer LC et CL, où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse. $LC = -1$ et $CL = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

IV Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$.

b. Même question pour $T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Réponse. $S = 5AB - 3BA - 5B^2$ et $T = A^2 - B^2 - 3AB - BA + 2BA^2 - 2A^2B$.

Produit de matrices via la formule du cours (définition)

V On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et soit $s \in \mathbb{R}$ la somme de tous ses coefficients.
Vérifier que $J \times A \times J = s\,J$.

VI Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient i, j dans $[\![1, n]\!]$.
On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a. Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i=j$ et 0 sinon)

Réponse.

a. $E_{i,j} \times M$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf la ligne i qui est égale à la ligne j de la matrice M.
$M \times E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf la colonne i qui est égale à la colonne j de la matrice M.

b. $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k}\, E_{i,l}$: c'est la matrice $E_{i,l}$ si $j = k$, la matrice nulle sinon.

Équations matricielles

VII Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(*i.e.* l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $AM = MA$)

Réponse. Il s'agit de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

VIII On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A.

Réponse. Les seules solutions sont $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et son opposée $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

IX On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

b. Déterminer toutes les matrices $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Réponse.

a. Il s'agit des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les deux premières lignes sont nulles.

b. Les solutions sont les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2t & t & 3t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Matrices symétriques, transposée

X Soient $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Démontrer que ${}^t(C \times D) = {}^tD \times {}^tC$.

XI On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}$$

a. Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.

b. Montrer que $A\,{}^tA$ est symétrique pour toute matrice A.

c. Soient A, B deux matrices symétriques.

- **a.** Montrer que : AB est symétrique $\Leftrightarrow$ $AB = BA$
- **b.** Que dire si elles sont antisymétriques ?
- **c.** Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice

XII Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, de taille $n \times n$, on appelle *trace* de A, et on note $tr(A)$, le nombre $\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

a. Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $tr(I_n)$ et $tr(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$?

b. Démontrer que $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Démontrer que $tr(AB) = tr(BA)$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. En déduire que l'équation $AB - BA = I$, d'inconnue $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, n'a pas de solution.

XIII Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $tr(A\,{}^tA) = 0$.

Réponse. La seule solution de cette équation est la matrice nulle.

Inverse d'une matrice

XIV **a.** Soit A une matrice inversible.
Démontrer que l'inverse de A est définie de manière unique.

b. Soient A et B deux matrices carrées inversibles.
Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c. Soient A et B deux matrices carrées non nulles, vérifiant $AB = 0$.
Montrer que ni A ni B n'est inversible.

d. Donner un exemple de matrices carrées A et B non nulles tq : $AB = 0$.

Réponse. L'exemple $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient pour **d.**

XV Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

a. B admet une inverse à gauche : $\exists A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A_1B = I_n$.

b. B admet une inverse à droite : $\exists A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ BA_2 = I_n$.

Montrer que $A_1 = A_2$.

Réponse. Il suffit d'écrire $A_1 = A_1I_n = A_1BA_2 = I_nA_2 = A_2$.

Obtention de l'inverse de A par une relation $AB = I_n$

XVI On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2\,I_3 - A$.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Réponse. $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

XVII On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A^3 - A$.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Réponse. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

XVIII On considère les matrices suivantes A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$.

b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

c. Montrer que $B^3 - 3B^2 + 2B = 0$.

d. En déduire que B n'est pas inversible.

Réponse.

a. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c. $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

d. On a $B(B^2 - 3B + 2I) = 0$ bien que $B^2 - 3B + 2I \neq 0$.

XIX Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.

b. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Réponse. $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 1/a & -1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & -1 \end{pmatrix}$.

XX Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB = A + I_n$.

a. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b. En déduire que : $AB = BA$.

Calcul d'inverse par pivot de Gauss

XXI Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Réponse.

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d. $D^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Puissance m^{e} par récurrence

XXII On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

a. Montrer que $B^2 = 3B$.

b. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.

Puissance m^{e} par la formule du binôme

XXIII On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer (simplifier !) A^n par la formule du binôme.

Réponse. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

XXIV On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $(A-I)^2 = 0$.

b. En utilisant le fait que $A = (A-I)+I$, calculer A^n pour $n \geq 2$.

XXV On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer M^n pour tout entier n.

Réponse. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{3k} = I$, $M^{3k+1} = M$ et $M^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

XXVI Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

a. Montrer que si P est inversible, alors $P = I$.
Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.

b. Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.

c. Montrer que $PQ = QP = 0$.

d. Calculer $(I+P)^n$, pour tout entier naturel n.

Réponse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I+P)^n = (Q+2P)^n = Q + 2^n P$.

Puissance m^e de matrices et suites définies par récurrence

XXVII On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.

c. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
Reconnaître les suites (α_n) et (β_n).

d. En déduire u_n et v_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse.

a. $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I)$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 2^n$ et $\beta_n = -1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3}(2^n - 1)$ et $v_n = \frac{1}{3}(2^n + 2)$.

XXVIII On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

a. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b. Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geq 0$.

c. Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Réponse.

a. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b. $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^0 = I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 5^n I + 5^{n-1} J = 5^{n-1} A$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ et $v_n = 13 \cdot 5^{n-1}$.

XXIX On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier que $Q = P^{-1}$.

b. Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n.

c. Montrer que $\forall n \geq 0$, $A^n = PD^nQ$.
En déduire les coefficients de A^n.

d. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n suivant n.