# Limites de fonctions
*Exercices*

E1A 2016-2017

## Calcul de limites

**I** Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.

**a.** $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ **b.** $g(x) = x^5 - \mathrm{e}^{2x}$ **c.** $h(x) = (3 + x^2)\ \mathrm{e}^x$

**II** Déterminer les limites des fonctions suivantes.

**a.** Limite de $f(x) = \dfrac{-5x^2 + 37x - 4}{8x^2 - 2}$ en $+\infty$.

**b.** Limite de $g(x) = \dfrac{x^7 - 1}{52x^6 + 3x^2 - 2x}$ en $-\infty$.

**c.** Limite de $f(x) = \dfrac{x^7\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{2x}}{x^3(\ln x) + x(\ln x)^5}$ en $+\infty$.

**d.** Limite de $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^7 + 5}$ en $-\infty$.

**e.** Limite de $h(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$ en $+\infty$.

**f.** Limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ en $+\infty$.

**g.** Limite de $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

**h.** Limite de $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)} - \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ en $+\infty$.

**i.** Limite de $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1 - x}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$ en $0^+$.

**III** Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{9x^3}$

**b.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{(\ln x)^4}$

**c.** $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$

**d.** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \ln(x + 3) - \ln(x - 1)$

**e.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 2}$

**f.** $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x^2 - 9}$

**g.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x$

**h.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

**i.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

**j.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x + 3) - \ln(x - 1)$

**k.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) - 2\ln x$

**l.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + 1}$

**m.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$

**n.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{x}$

## Composition des limites

**IV** Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\ \ln(x)$ *(on pourra poser $X = \dfrac{1}{x}$)*

**b.** $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (x - 1)^2\ \ln(x - 1)$ *(on pourra poser $X = x - 1$)*

**c.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^2\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ *(on pourra poser $X = \dfrac{1}{x}$)*

**d.** $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ *(on pourra poser $X = \sqrt{x}$)*

## Limite à droite, limite à gauche

**V** Soit $a \in \mathbb{R}$.

**a.** La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en $a$ ?

**b.** La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue en $a$ ?

**VI** Étudier la continuité au point $x_0$ des fonctions suivantes.

**a.** $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

**b.** $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

**c.** $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - e^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

**d.** $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

**e.** $x_0 = 1$ et $j(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

## Prolongement par continuité

**VII** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis rechercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de cet ensemble de définition :

**a.** $f_1(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{(x-2)^2}$

**b.** $f_2(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$

**c.** $f_3(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}$

**d.** $f_4(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$

**e.** $f_5(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$

**f.** $f_6(x) = e^{-1/x^2}$

## Utilisation d'inégalités

**VIII** Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\lfloor \frac{3}{x} \rfloor}$

**IX** Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^3}}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x + x^2 + e^{x^3}}{x^3+5}$

**X** On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Le but est de trouver la limite de $f$ en $1^-$.

**a.** Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

**b.** Démontrer que : $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$.

**c.** En déduire que : $\forall u > -1,\ u \times e^{\frac{1}{\ln(1+u)}} \geq u \times e^{\frac{1}{u}}$.

**d.** Déterminer $\lim\limits_{u \to +\infty} u \times e^{\frac{1}{u}}$ et conclure.

**XI** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\, e^{\frac{1}{x(x-1)}}$
Le but est de trouver la limite de $f$ en $1^+$.

**a.** Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

**b.** Démontrer que : $\forall u > 0,\ 0 < \dfrac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} \times e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq (1-u)^3 \times \dfrac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$.

**c.** Déterminer $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$ et conclure.

## Taux d'accroissement du logarithme

**XII** On calcule ici une limite très classique et très utile. À connaître !

**a.** Montrer que pour tout $x \in \left]-1;+\infty\right[$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

**b.** En déduire la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ lorsque $x \to 0$.

**XIII** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que $f$ est non nulle au voisinage de $x_0$.
On suppose enfin que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

**a.** Démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

**b.** En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+e^{-x})$.

**XIV** Déterminer les limites suivantes

**a.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+x^3\right)^{1/x}$

**b.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-5x)}{x}$

**c.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

**d.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

**e.** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

**f.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

**g.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

**h.** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\ln x}$

**i.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

**j.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ \ln\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)$

**XV** Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$

**b.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

**XVI** On considère la fonction $f(x) = (\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)}$ et on se propose de déterminer sa limite pour $x \to \mathrm{e}^-$ (e par valeurs strictement inférieures).

**a.** On pose $X = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $X$.

**b.** Montrer que $\lim\limits_{X\to 1^-} \dfrac{\ln(1+\ln X)}{X-1} = 1$.

**c.** Montrer que $\lim\limits_{X\to 1^-} \dfrac{1+\ln(1-X)}{\ln(1-X)} = 1$.

**d.** En déduire que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \exp(-(1-X)\ln(1-X)\ H(X))$$

où $H(X)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{X\to 1^-} H(X) = 1$.

**e.** En déduire $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} f(x)$.
*(on pourra poser $T = 1-X$)*

## Démonstrations du cours

**XVII** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bornée} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x) = 0$$

**XVIII** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

**a.** Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$$

**b.** Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to +\infty} (f+g)(x) = \ell_1+\ell_2$$

**c.** Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x) = \ell_1\ell_2$$

On pourra remarquer que :
$f(x)g(x) - \ell_1\ell_2 = f(x)(g(x)-\ell_2) + \ell_2(f(x)-\ell_1)$.