Intégration sur un intervalle non borné
Exercices

E1A 2016-2017

Convergence d'intégrales impropres

I Déterminer la nature des intégrales impropres qui suivent et, pour celles qui convergent, calculer leur valeur.

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\, dt$

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}\, dt$

c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\, dt$

d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t+1)\, dt$

e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{5} t^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt$

f. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ln t\, dt$

g. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{dt}{(t-1)(t+2)}$

h. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$

i. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$

j. $\displaystyle\int_2^{+\infty} t^2\, \ln\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$

Techniques de calcul

II Justifier la convergence, puis calculer la valeur, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}$.
On pourra procéder au changement de variable $u = e^t$.

III Réduction du degré.

a. Calculer, en justifiant sa convergence, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(\frac{1}{t})}{t^2}\, dt$.

b. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(\frac{1}{t})}{t^3}\, dt$.
Par quelle technique peut-on se « ramener » à la question précédente ?

Théorème de comparaison

IV Intégrale de Gumbel.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto e^{2x-e^x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. En déduire que pour tout x réel, $e^{x-e^x} \leq e^{-|x|}$.

c. Démontrer finalement que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x}\, dx$ est convergente.

V Intégrale de Gauss.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto e^{2x-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. En déduire que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente et que $I \leq \dfrac{e}{2}$.

c. En admettant que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.
Penser à un changement de variable et utiliser la parité.

Utilisation de la parité

VI On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

1. **a.** Étudier la parité de f.
   b. Écrire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 sous forme intégrale.
   c. Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$ et calculer sa valeur.
   d. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$.
2. **a.** Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx = \ln(2)$.
   Penser à une intégration par parties.
   b. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$.

VII Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x+e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ converge.

b. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et donner sa valeur (*étudier la parité*).