Intégration sur un segment
Exercices

E1A 2016-2017

Calcul de primitives à vue

I Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_2^3 (t^2+t+1)\,dt$

b. $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{1-2t}\,dt$

c. $\displaystyle\int_0^2 \left(2x+1+\frac{3}{2t+3}\right)\,dt$

d. $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} \left(5+4\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\right)\,dt$

e. $\displaystyle\int_1^0 \mathrm{e}^{2t}\,dt$

f. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{t}{t+1}\,dt$

II Donner une primitive des fonctions suivantes.
On précisera l'ensemble de définition.

a. $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$

b. $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$

c. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$

d. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$

e. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(x)^2$

III Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3}\,dx$

c. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

d. $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}^3}^{1/\mathrm{e}^2} \frac{dx}{x\ln(x)}$

e. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2}\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,dx$

g. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$

h. $\displaystyle\int_1^{1/\ln(2)} 2^x\,dx$

i. $\displaystyle\int_2^1 \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)\,dx$

j. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,dx$

k. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2}{x}\,dx$

l. $\displaystyle\int_0^1 3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+1}\,dx$

m. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$

n. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dx}{x\ln(x)^2}$

o. $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^3}\,dx$

p. $\displaystyle\int_0^3 (5^x-x+4)\,dx$

q. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\,dx$

Découpage de l'intervalle

IV Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{11}} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1}\,dx$

Primitives de fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples

V Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,dt$

b. $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{t^2-4}\,dt$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t-2}\,dt$

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,dt$

e. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt$

f. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

g. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-6t^2+t+5}{2t+1}\,dt$

h. $\displaystyle\int_1^0 \frac{-3t^2-t+18}{t^2-4}\,dt$

Primitives et intégration par parties

VI Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 x\ \mathrm{e}^x\ dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\ dx$

c. $\displaystyle\int_2^3 (\sqrt{x}+\ln(x))\ dx$

d. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x-\mathrm{e})\ \ln(x)\ dx$

e. $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\ dx$

f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\ dx$

g. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\ \mathrm{e}^{-x}\ dx$

h. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\mathrm{e}^x\ dx$

i. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\ dx$

j. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\ dx$

Calcul de primitives par changement de variable

VII Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1}$ avec le changement de variable $u=\mathrm{e}^x$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto \ln(u)$.

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$ avec le changement de variable $u=\sqrt{x}$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto u^2$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}dx$ avec le changement de variable $u=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto \ln(u)^2$.

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ avec le changement de variable $u=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto \ln(u^2-1)$.

e. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx$ avec le chang. de variable $u=\sqrt{x^3+1}$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto (u^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

f. $\displaystyle\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$ avec le changement de variable $u=\sqrt[3]{x}$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto u^3$.

g. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$, avec le changement de variable $u=\sqrt{x}$, *i.e.* $\varphi : u \mapsto u^2$.

VIII Calculer les intégrales suivantes par changement de variable. *(changement non précisé !)*

a. $\displaystyle\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\,dt$

b. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}}\,dt$

c. $\displaystyle\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t}-1)\,dt$

d. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

Primitive sous forme intégrale

IX Dériver les fonctions suivantes.

a. $H_1 : x \mapsto \displaystyle\int_3^x e^{\sqrt{t}}\, dt$

b. $H_2 : x \mapsto \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

c. $H_3 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{n^2} e^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

d. $H_4 : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2} e^{5\sqrt{3\ln(t)}}\, dt$

e. $H_5 : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$

f. $H_6 : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{1+u^2}\, du$

g. $H_7 : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{s}{\ln(s)}\, ds$

Raisonnement par encadrement

X On note $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

a. Donner l'ensemble de définition de F, puis donner le signe de F.

b. Montrer que pour tout $t \geq 0$: $t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.

c. En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

d. Montrer alors que : $\dfrac{F(x)}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{7}{3}$.

e. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

XI Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{-u^2}\, du$.

Sommes de Riemann

XII Calculer les limites des suites ci-dessous.

a. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

b. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

c. $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\ n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Relation de récurrence et intégration par parties

XIII On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\, dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a $I_n = \dfrac{e}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$.

c. Montrer que : $n\ I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$.

XIV On note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x\, dx$.

a. À l'aide d'un encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

b. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

c. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Relation de récurrence et linéarité de l'intégration

XV On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx$$

a. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

c. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

d. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.

e. En déduire une fonction Scilab qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

f. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

g. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n.