Inégalités et valeur absolue
Exercices

E1A 2016-2017

I Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue x suivantes :

a. $5x^2 - 7x + 2 \leq 0$,

b. $\dfrac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 2x - 16} \geq 0$,

c. $x^2 + x > e$.

II Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, d'inconnue x :

a. $x^2 - 5x + 4 \geq -2$,

b. $\dfrac{2x - 3}{x^2 - 4} < 1$.

III Déterminer deux réels A, B tels que pour tout $x \geq 1$,

$$A \leq 2016 + 9\,x + 12\,x^2 \leq B\,x^2.$$

IV (Un carré est positif)

a. Montrer que pour tous x et y réels, $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

b. Montrer que pour tout x strictement positif, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

V Déterminer les couples de réels (a, b) tels que :

a. $a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$,

b. $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$,

c. $a^2 - 2ab - 3b^2 \geq 0$,

VI Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue x suivantes.

a. $x + 2 \geq \sqrt{x + 5}$

b. $-x + 1 > \sqrt{3x^2 - 2x - 7}$

c. $x - 2 \leq \sqrt{x - 1}$

d. $\sqrt{x + 3} < -x + 4$

VII (Variables muettes) Soit a un réel. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

a. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq axy$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq -axy$

Pour quelles valeurs de a sont-elles vraies ?

VIII Résoudre l'équation $\sqrt{|x^2 - x + 6|} = x + 1$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

IX Soit x un réel. Écrire sans valeur absolue les quantités suivantes :

a. $|x + 1| + |x + 2|$,

b. $|x^2 - 1| - |x^2 + 1| + |2x^2 - x + 1|$,

c. $\dfrac{|2x + 7| + 3}{7 - |3x + 2|}$.

X Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations d'inconnue x suivantes :

a. $|x + 1| = 7$,

b. $|x + 1| + |x + 2| = 1$,

c. $|x + 1| + |2x + 3| + |4x + 5| = 7$,

d. $|x^2 + x - 7| + |x| < 5$.

XI (Inégalité triangulaire 1)

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y|^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$.

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq |x| + |y|$.

c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

XII (Inégalité triangulaire 2)

a. Montrer que pour tout x réel, $|x| = \max(x, -x)$.

b. En déduire que pour tout a réel, $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.

c. Démontrer l'inégalité triangulaire en utilisant ce résultat.

XIII Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$. Quelle est cette fonction ?

XIV Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une expression simple de f sur $[n, n + 1[$.

b. Tracer le graphe de la fonction f.

c. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.