Étude des fonctions usuelles
Exercices

E1A 2016-2017

Domaine de définition

I Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a. $s \mapsto \sqrt{\dfrac{2+3s}{5-2s}}$,

b. $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$,

c. $u \mapsto \mathrm{e}^u \ln(2u+3)$,

d. $v \mapsto \ln(1-2v^2)$,

e. $w \mapsto \dfrac{\sqrt{w(w+1)}}{w^2+1}$,

f. $x \mapsto \ln(x^5+1)$,

g. $y \mapsto (y^2-y+2)^{1/5}$,

h. $z \mapsto \ln\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)$.

II On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{x-2}{x-1}, \qquad g : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Quels sont les domaines de définition des fonctions $f+g$, $f \times g$, $f \circ g$ et $g \circ f$?

III Soient $f : x \mapsto x^2+1$ et $g : x \mapsto \ln(x)$. Exprimer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et déterminer leurs domaines de définition.

Règles de dérivation

IV Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en précisant le domaine) :

a. $s \mapsto 1+\ln(1+s)$

b. $t \mapsto \dfrac{1+t}{1+\mathrm{e}^t} - t$

c. $u \mapsto u^{1/u}$

d. $v \mapsto \ln\left(2v - \dfrac{3}{v}\right)$

e. $w \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2w}}{w^2-1}$

Puissances

V Simplifier les expressions suivantes :

$$a = 16^{-\frac{1}{2}} \times 2^2, \quad b = 27^{\frac{1}{3}}, \quad c = \ln\left(\frac{e^2}{2}\right) + \ln(2), \quad d = 4^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}.$$

VI Où est l'erreur ? $-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$

VII Soient x et y des réels.

a. Résoudre l'équation $y = x^\alpha$ d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$. On pourra faire une discussion selon les valeurs de x et y.

b. Interpréter graphiquement votre résultat pour la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

VIII Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la fonction $f : x \mapsto q^x$ selon la valeur de q.

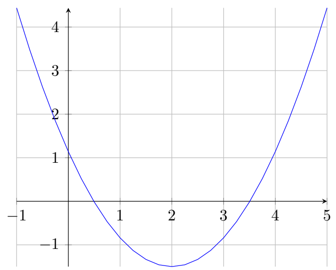
IX

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

b. Quel est le domaine de définition de $x \mapsto \ln(x^2)$? Tracer son graphe.

Représentation graphique

X Soient a, b, c des réels tels que le graphe de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ est :



Déterminer le signe des réels :

$$a, \quad b, \quad c, \quad b^2-4ac, \quad a+b+c, \quad a-b+c.$$

XI

a. Tracer sur une même figure les graphes des fonctions

$$x \mapsto x^3, \quad x \mapsto (x+1)^3, \quad x \mapsto x^3+1.$$

b. Tracer sur une même figure les graphes des fonctions

$$x \mapsto \ln(x+1), \quad x \mapsto \ln(1-x), \quad x \mapsto \ln(x)-1.$$

XII Tracer sur une même figure les graphes des fonctions $x \mapsto \log(x+2)$ et $x \mapsto e^x - 2$. Qu'observe-t-on ?

XIII

a. Combien de fois les graphes des fonctions $x \mapsto \exp(2x-1)$ et $x \mapsto \exp(x)$ se croisent-ils ?

b. Combien de fois les graphes des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto 2^{x+1}$ se croisent-ils ?

XIV Soit α un réel et soit p_α la fonction $x \mapsto x^\alpha$. Montrer que la courbe de p_α dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $(1,1)$, puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe de p_α en ce point.

Étude de fonction complète

XV Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a. Faire l'étude de la fonction f.

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y par f.

XVI Faire l'étude de chacune des fonctions suivantes.

a. $q \mapsto q^3 - 3q + 1$

b. $r \mapsto \dfrac{1}{r^2+1}$

c. $s \mapsto \dfrac{s}{s^2-1}$

d. $t \mapsto 3t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 72t + 1$

e. $u \mapsto \dfrac{u}{1+\mathrm{e}^u}$

f. $v \mapsto \mathrm{e}^{1/\ln v}$

g. $w \mapsto \ln(\mathrm{e}^w + \mathrm{e}^{-w})$

h. $x \mapsto x\sqrt{x}$

i. $y \mapsto \lfloor y \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor)^2$

j. $z \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{z}\right)^z$

XVII On considère les fonctions $c : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $s : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

a. Quels sont les domaines de définition et de dérivabilité de ces fonctions ?

b. Montrer que $s' = c$. En déduire les variations de s.

c. Résoudre l'équation $s(x) = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

d. Montrer que $c' = s$. En déduire les variations de c.

e. Étudier la fonction $t : x \mapsto \dfrac{s(x)}{c(x)}$.

Application aux inégalités

XVIII On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que pour tout x réel, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.

c. En déduire que pour tout $y > 0$, $\ln(y) \leq y - 1$.

XIX Montrer que pour tout x réel positif,

$$1 - x \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

XX

a. Étudier la fonction $x \mapsto (1-x)\ln(1-x) + x$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{1-x}} \leq 1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$.

XXI Démontrer les propriétés suivantes :

a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$

c. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq \frac{1}{\alpha} x^\alpha$

XXII Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $f : x \mapsto (1+x)^n - 1 - nx$.

a. Étudier la fonction f sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

b. En déduire que :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Il s'agit de l'inégalité de Bernoulli. On la recroisera...

XXIII Soit $\alpha \in]0,1[$.

a. Étudier la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha - t^\alpha$.

b. En déduire que pour tous x et y réels strictement positifs,

$$(x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha.$$

c. Qu'en déduire pour la fonction racine carrée ?