# Dénombrement et coefficients binomiaux
## *Exercices*

E1A 2016-2017

## Notations du cours : manipulations

**I** Calculer les quantités suivantes : $7!$, $\dfrac{27!}{24!}$, $\dfrac{10!}{(10-3)!}$, $\dbinom{10}{3}$.
À quels dénombrements correspondent-elles ?

## Parties d'un ensemble fini

**II** Donner le cardinal des ensembles suivants, puis expliciter tous leurs éléments.

**a.** $\mathcal{P}(\emptyset)$
**b.** $\mathcal{P}(\{5\})$
**c.** $\mathcal{P}(\{1,4\})$
**d.** $\mathcal{P}(\{1,3,4,5\})$
**e.** $\mathcal{P}(\{\{1\},2,4\})$

**III** Les énoncés suivants sont-ils vrai ou faux ? Justifier vos réponses.

**a.** $2 \in \{3,\{2\},\{\{4\}\},\emptyset\}$
**b.** $\{1\} = \{\{1\}\}$
**c.** $3 \in \emptyset$
**d.** $\emptyset \in \{\emptyset\}$
**e.** $\emptyset \subset \mathcal{P}(\{1\})$
**f.** $\emptyset \in \{1\}$
**g.** $\{\{3\}\}$ a un élément.
**h.** $\{n \in [\![82;98]\!] \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2\} = \emptyset$

**IV** On considère un ensemble $E$ a 6 élements. On cherche à calculer le nombre de couples $(A,B)$ de parties de $E$ telles que $A \cup B = E$.

**a.** Combien y a-t-il de parties de $E$ à deux éléments ? Si $A$ est une partie à deux éléments, combien y a-t-il de parties $B$ telles que $A \cup B = E$ ?
**b.** Plus généralement, combien y a-t-il de parties $A$ à $k$ éléments ? Une telle partie $A$ étant donnée, combien y a-t-il de $B$ qui conviennent ?
**c.** En déduire la solution du problème.
**d.** Si on remplace 6 par un $n$ quelconque, que devient la solution ?

**V** Soit $n$ un entier strictement positif et $E = \{1,2,\ldots,n\}$.

**a.** Trouver le nombre de couples $(x,y)$ de $E^2$ tels que $x > y$.
**b.** Trouver le nombre de couples $(x,y)$ de $E^2$ tels que $x = y$.
**c.** Trouver le nombre de triplets $(x,y,z)$ de $E^3$ tels que $x < y < z$.

## Dénombrement : cas pratiques

**VI** On considère un jeu de 32 cartes. Combien de mains de 5 cartes vérifient-elles les conditions suivantes ?

**a.** Aucune condition.
**b.** Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
**c.** Il y a exactement deux valets.
**d.** Il y a exactement un as et deux carreaux.
**e.** Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
**f.** Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
**g.** Les cinq cartes sont de la même couleur.
**h.** Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

**VII** On tire 5 atouts dans un jeu de tarot. Combien de tirages vérifient-ils les conditions suivantes ?

**a.** Au moins un atout est multiple de 5.
**b.** Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.
**c.** On a tiré le 1 ou le 21.

**VIII** À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

**a.** trois lettres : A, B et C
**b.** neuf chiffres non nuls : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

**a.** Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?
**b.** Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

**IX** Étant donné un groupe de $k$ personnes choisies au hasard, quelle est la probabilité que deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour ?
*(on considère que l'année compte* 365 *jours, on néglige les années bissextiles)*

**X** De combien de manières peut-on classer quatre personnes (sans qu'il y ait d'ex-æquo) ? Et si les ex-æquo sont possibles ?

**XI** Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

**XII** Trois locataires laissent, en sortant, la clé numérotée de leur appartement à la gardienne de l'immeuble. Celle-ci s'amuse à enlever les numéros et rend au hasard les clés aux trois personnes à leur retour. On notera $R_i$ ($i \in [\![1,3]\!]$) l'ensemble des répartitions telles que le $i$-ème locataire retrouve sa clé.

**a.** Décrire l'ensemble $R_1 \cap \overline{R_3}$.

**b.** Écrire en fonction de $R_1$, $R_2$ et $R_3$ :
- l'ensemble $A$ des répartitions telles que les trois personnes retrouvent leur clé.
- l'ensemble $B$ des répartitions telles que deux personnes seulement retrouvent leur clé.
- l'ensemble $C$ des répartitions telles que le premier locataire est le seul à retrouver sa clé.
- l'ensemble $D$ des répartitions telles qu'une personne seulement retrouve sa clé ?

**c.** Déterminer le cardinal des ensembles de la question précédente.

**XIII** On monte un escalier de $n$ marches. À chaque pas, on franchit soit une marche, soit deux marches. On note $p_n$ le nombre de façon d'arriver à la $n$-ième marche et on voudrait expliciter la suite $(p_n)$.

**a.** Que valent $p_1$ et $p_2$ ?

**b.** Déterminer une relation de récurrence liant $p_n$, $p_{n-1}$ et $p_{n-2}$.

**c.** En déduire une expression de $p_n$ en fonction de $n$.

**d.** On appelle $k$ le nombre de pas de deux marches qu'on a fait en gravissant l'escalier. Quelles sont les valeurs possibles pour $k$ ?

**e.** Calculer en fonction de $k$ le nombre total de pas nécessaires.

**f.** Déterminer le nombre de façon de grimper l'escalier, sachant qu'on a fait $k$ pas de deux marches.

**g.** En déduire une expression de $p_n$ sous forme d'une somme.

## Formule du crible

**XIV** On considère une classe de 36 élèves qui étudient tous au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand. On sait que :

**a.** 22 élèves étudient l'anglais, 22 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol

**b.** 10 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol, 11 à la fois l'anglais et l'espagnol

Combien d'élèves étudient les trois langues ?

**XV** Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a retrouvé dix-huit personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui, soit par non, à chacune des questions suivantes :

**a.** Avez-vous entendu une détonation ?

**b.** Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?

**a.** Dix personnes ont répondu « oui » à la première question.

**b.** Six personnes ont répondu « non » à la deuxième question.

**c.** Cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.

Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

## Nombre d'applications

**XVI** Dans cet exercice, on souhaite déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

**a.** Démontrer que ce nombre est égal au nombre de suites croissantes composées de $n$ éléments de $[\![1,p]\!]$.

On propose maintenant de coder une telle suite croissante par la suite de symboles suivante :

**a.** on écrit succesivement chaque 1 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

**b.** on écrit succesivement chaque 2 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

**c.** ...

**d.** on écrit succesivement chaque $p$ utilisé (éventuellement aucun) et on s'arrête sans écrire de | à la fin.

**b.** Combien y a-t-il de symboles | utilisés dans ce codage ?

**c.** Quelles sont les applications représentées par les codages suivants ?

**a.** 1|2|333 **b.** 111||33 **c.** |22222| **d.** 11|22|3

**d.** Conclure quant au nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

**XVII** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ?

**XVIII** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls. Montrer que le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est $\dbinom{n}{p}$.

**XIX** **a.** Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments de $[\![1,10]\!]$ ?

**b.** Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments distincts de $[\![1,10]\!]$ ?

**c.** Combien y a-t-il de suites strictement croissantes de 5 éléments de $[\![1,10]\!]$ ?

**d.** Généraliser les questions précédentes pour des suites possédant $n$ éléments dans l'ensemble $[\![1,p]\!]$.

## Cœfficients binomiaux

**XX** Développer les expressions suivantes.

**a.** $(2-x)^5$ **c.** $(x-1)^8$

**b.** $(3x+2t)^3$ **d.** $(x+1)^6+(x-1)^6$

**XXI** Quel est le plus grand terme du binôme $(2+3)^{59}$ ?

**XXII** Développer ou simplifier les expressions suivantes.

**a.** $(3-\sqrt{5})^6$ **d.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}$ **f.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

**b.** $(1+\sqrt{2})^4$

**c.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ **e.** $\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}$ **g.** $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\binom{n}{k}$

**XXIII** Simplifier les expressions suivantes.

**a.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ **c.** $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$ **e.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{3^k}$ **g.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$

**b.** $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ **d.** $\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$ **f.** $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}$

**XXIV** Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in[\![0,n]\!],\quad \binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-2}{p-1}+\cdots+\binom{p-1}{p-1}$$

**XXV** **a.** En utilisant l'identité $(1+x)^{p+q}=(1+x)^p\times(1+x)^q$, démontrer que :

$$\forall (p,q,n)\in\mathbb{N}^3,\quad \binom{p+q}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{p}{i}\binom{q}{n-i}$$

**b.** Donner une démonstration combinatoire de cette égalité en considérant une ensemble $E$ à $p$ éléments et un ensemble $F$ à $q$ éléments.

**c.** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

**XXVI** Démontrer l'identité : $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

**XXVII** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et $p\in\mathbb{N}$. On note $B_n^p$ le nombre de $n$-uplets d'entiers naturels $(x_1,\dots,x_n)$ tels que $x_1+\cdots+x_n=p$.

**a.** Pour $p\in\mathbb{N}$, calculer $B_1^p$ en fonction de $p$.

**b.** Soit $n\geq 2$. Justifier l'égalité : $B_n^p=\sum_{k=0}^{p}B_{n-1}^k$.

**c.** Montrer par récurrence sur $n$ que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in[\![0,n]\!],\quad B_n^p=\binom{n+p-1}{p}$$