

# Équations et polynômes

## Exercices

E1A 2016-2017

### Calculs élémentaires

**I** Simplifier les expressions suivantes :

a.  $\frac{13/12}{12/13}$

b.  $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{9} - \frac{1}{6}$

c.  $\frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 45 \times 100}$

d.  $(\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

e.  $\frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$

f.  $\sqrt{\frac{3^7 \times 2^3}{9^9 \times 7^3}}$

**II** Soit  $x$  un réel. Développer les expressions  $(3x + 2)^3$  et  $(2x - 1)^4$ .

**III** Soit  $x$  un réel. Factoriser les expressions suivantes :

a.  $2x^2 - 12x + 18$

b.  $8x^2 - 32$

c.  $(2x - 6)(x + 2) - (x + 1)(x - 3) + 2x(3 - x)$

d.  $(2x + 1)^3 + (2x + 1)^2 + 2x + 1$

**IV** Simplifier les expressions suivantes :

a.  $\frac{x^{n+1}}{x^2}$

b.  $\frac{y}{y^n}$

c.  $\frac{1}{z^{-n}}$

d.  $\frac{1}{x^{1-n}}$

e.  $\frac{(-3)^{2n-1}}{7^{4n+1}}$

f.  $\frac{3^{2n}5^{n-1}}{(-7)^{n+1}}$

g.  $\frac{x^{2n-1}}{(x^{n+1})^3}$

**V** Calculer de tête :

a. 36120924 divisé par 3,

b. 103 au carré,

c. Et 99 au carré,

d.  $1002 \times 998$ ,

e.  $11 \times 17$ ,

f.  $6\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}$ ,

g. le coefficient de  $x$  dans  $(x - 2)^2 + 5x$ ,

h. le coefficient de  $x^2$  dans  $(2 - x)^2 + (x + 1)(3 - 5x)$ ,

### Équations

**VI** Alice a un capital de 50 000 euros composé à 99 % d'actions, le reste étant placé sur un livret A. Une crise survient et ses actions sont dévaluées, mais elles représentent encore 98 % du capital. Combien Alice a-t-elle perdu ?

**VII** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations d'inconnue  $x$  suivantes :

a.  $x^2 + x + 1 = 0$ ,

b.  $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$ ,

c.  $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ ,

d.  $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$ .

**VIII** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations d'inconnue  $x$  suivantes :

a.  $x = \sqrt{x} + 2$ ,

b.  $x - 7 = \sqrt{x - 5}$ ,

c.  $\frac{1}{\sqrt{x} - 2} = -x$ .

**IX** Soit  $m$  un réel. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante d'inconnue  $x$  :

$$m^2 x + 2m = 9x - 6$$

On pourra discuter selon la valeur du paramètre  $m$ .

**X** Soit  $m$  un réel. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante d'inconnue  $x$  :

$$m x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$$

On pourra discuter selon la valeur du paramètre  $m$ .

**XI** Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  réels tels que, pour tout  $x$  réel différent de 0, 1 et  $-1$  :

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$$

**XII** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes, d'inconnue  $x$  :

a.  $\sqrt{2-x} = x + 4$

b.  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$

c.  $(2x-3)^2 = (7x+5)^2$

d.  $\frac{5}{3-x} = 3 - \frac{x+4}{3}$

e.  $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6}} + 6$

f.  $(17x-13)^2 + (2x+15)^2 = (4x+30)(17x-13)$

g.  $x + \frac{2}{6 - \frac{3}{x-1}} = 1$

h.  $\frac{2}{x-3} = 3$

i.  $\frac{5}{3x-2} = \frac{1}{x-4}$

**XVI** (♠) Dans cet exercice, on veut résoudre l'équation  $x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0$  d'inconnue  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

a. L'équation admet-elle une racine évidente ?

b. Montrer que l'équation équivaut à  $x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

c. On pose  $u = x + \frac{1}{x}$ . Que vaut  $u^2$  en fonction de  $x$  ?

d. Résoudre et conclure.

## Polynômes

**XIII** On considère le polynôme  $P = 3X^2 - X - 2$ .

a. Montrer que 1 est une racine de  $P$ , et trouver un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - 1)Q$ .

b. Etudier le signe de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .

**XIV** Factoriser le polynôme  $P = X^4 - 6X^2 + 7X - 6$ , sachant qu'il admet deux racines évidentes.

**XV** (♠) Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  les polynômes  $X^2 + 2X + m - 4$  et  $X^2 + X - 7m + 1$  ont-ils une racine commune ? Quelle est alors cette racine ?