

Colles de mathématiques E1A

langage, raisonnement, polynômes et équations

22 septembre 2016 (semaine 2)

Planche A

Question de cours

- Soient a, b, c réels avec $a \neq 0$. Résoudre l'équation $(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$ lorsque $b^2 - 4ac = 0$ puis lorsque $b^2 - 4ac > 0$.

Exercice 1

Résoudre l'équation $(2x - 3)^2 = (7x + 5)^2$ d'inconnue x .

Exercice 2

Résoudre l'équation $(17x - 13)^2 + (2x + 15)^2 = (4x + 30)(17x - 3)$ d'inconnue x .

Exercice 3

1. Formuler avec des quantificateurs la phrase « entre deux rationnels distincts, il existe toujours un rationnel ».
2. Formuler sa négation.
3. Laquelle de ces deux propositions est vraie ? Le prouver.

Planche B

Question de cours

- Règles de négation.

Exercice 1

On considère la phrase « s'il pleut, alors mon jardin est mouillé ».

- Formuler cette phrase avec un connecteur logique.
- Donner sa négation.

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{17x^2 - 16x} - 2x = x + 4$ d'inconnue x .

Exercice 3

Factoriser le polynôme $X^4 - 3X^3 - 35X^2 + 39X + 70$.

Planche C

Question de cours

- Définition et propriétés du degré.

Exercice 1

- Peut-on trouver deux polynômes P et Q tels que $\deg(P + Q) = 9$ et $\deg(P \times Q) = 22$?
- Peut-on trouver deux polynômes P et Q tels que $\deg(P + Q) = 22$ et $\deg(P \times Q) = 9$?

Exercice 2

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Formuler avec des quantificateurs les propriétés suivantes, puis leur négation :

- La courbe de f n'intersecte jamais l'axe des abscisses.
- La courbe de f est toujours au dessus de la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$.

Donner un exemple de chacune des quatre situations.

Exercice 3

Résoudre l'équation $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6}} + 6$ d'inconnue x .

Planche D

Question de cours

- Soient a, b, c réels avec $a \neq 0$. On suppose que $b^2 - 4ac < 0$. Que peut-on en déduire pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x ? Le démontrer.

Exercice 1

Résoudre l'équation $\sqrt{x^2} - 2x = -1$ d'inconnue x .

Exercice 2

Résoudre l'équation $\frac{5}{3-x} = 3 - \frac{x+4}{3}$ d'inconnue x .

Exercice 3

Soient a, b, c des entiers. Montrer que les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x dans \mathbb{Z} sont des diviseurs de c .

Généraliser.

Planche E

Question de cours

- Lien entre les racines et la factorisation

Exercice 1

Factoriser le polynôme $7X^2 + 12X + 5$.

Exercice 2

Factoriser le polynôme $X^4 - 3X^3 - 35X^2 + 39X + 70$.

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{17x^2 - 16x} - 2x = x + 4$ d'inconnue x .

Planche F

Question de cours

- Identités remarquables de degré 3.

Exercice 1

Résoudre l'équation $(2x - 3)^3 = (7x + 5)^3$ d'inconnue x .

Exercice 2

Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$ d'inconnue x .

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P(x) = 0 \iff P(x^2) = 0).$$