Interrogation de cours n$^{\circ}$ 3

E1A 2016-2017

18 octobre

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels telle que $u_0 = 0$, $u_1 = -\dfrac{5}{2}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{3u_n - 5u_{n+1}}{2}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une formule explicite pour u_n.

Rédaction. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La relation de récurrence se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 0$. L'équation caractéristique associée est $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Son discriminant vaut 49, donc elle admet deux solution distinctes qui sont -3 et $\frac{1}{2}$. D'après le théorème du cours, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A(-3)^n + B(\frac{1}{2})^n$.
Sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = -\frac{5}{2}$, on résout le système d'équation suivant pour déterminer les valeurs de A et B (par exemple avec la méthode du pivot de Gauss) :
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + \frac{B}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{\iff} \begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{7}{2}B = -\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{5}{7} \\ B = -\frac{5}{7} \end{cases}.$$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5}{7}\left[(-3)^n - \dfrac{1}{2^n}\right]$.

Erreurs fréquentes :
— Confusion avec une suite arithmético-géométrique.
— Fautes de calculs, en particulier de signes.
— Mal simplifier les puissance dans $u_0 = A(-3)^0 + B(\frac{1}{2})^0$ et $u_1 = A(-3)^1 + B(\frac{1}{2})^1$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels telle que $u_0 = 0$, $u_1 = -\dfrac{7}{3}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{2u_n - 5u_{n+1}}{3}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une formule explicite pour u_n.

Rédaction. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La relation de récurrence se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0$. L'équation caractéristique associée est $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Son discriminant vaut 49, donc elle admet deux solution distinctes qui sont -2 et $\frac{1}{3}$. D'après le théorème du cours, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A(-2)^n + B(\frac{1}{3})^n$.
Sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = -\frac{7}{3}$, on résout le système d'équation suivant pour déterminer les valeurs de A et B (par exemple avec la méthode du pivot de Gauss) :
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + \frac{B}{3} = -\frac{7}{3} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{7}{3}B = -\frac{7}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n - \dfrac{1}{3^n}$.

Erreurs fréquentes :
— Confusion avec une suite arithmético-géométrique.
— Fautes de calculs, en particulier de signes.
— Mal simplifier les puissance dans $u_0 = A(-2)^0 + B(\frac{1}{3})^0$ et $u_1 = A(-2)^1 + B(\frac{1}{3})^1$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2$ est-elle arithmétique ?

Rédaction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $u_n = 2^n$ par définition.
Montrons que cette suite n'est pas arithmétique. Supposons donc qu'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, c'est à dire $2^{n+1} - 2^n = r$. On a donc en particulier $r = 2^1 - 2^0 = 1$ et $r = 2^2 - 2^1 = 2$, d'où $1 = 2$. Il y a une contradiction.

Erreurs fréquentes :
— Confondre le symbole $\prod$ avec le symbole $\sum$.
— Se contenter d'écrire que la suite est géométrique.

4. Exprimer $(n+1)!$ en fonction de $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?

Rédaction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
La suite $(n!)$ n'est pas géométrique, prouvons-le. On suppose donc qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = q \times n!$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après ce qui précède $(n+1) \times n! = q \times n!$. Or $n! \geq 1$, donc on peut diviser et obtient $q = n+1$. Ceci étant vrai quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ q = n+1$. On a donc en particulier $q = 0+1$ et $q = 1+1$, d'où $0 = 1$. Il y a une contradiction.

Erreur fréquente : Oublier la quantification sur q et conclure que $(n!)$ est géométrique de raison $n+1$, ce qui n'a bien sûr aucun sens.

5. Donner la définition de *suite arithmético-géométrique.*
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 18^n - 10$ est-elle arithmético-géométrique ?

Rédaction. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.
Montrons que la suite de l'énoncé est arithmético-géométrique. D'après la définition, il s'agit de trouver a et b réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 18^{n+1} - 10 = a(18^n - 10) + b$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $18^{n+1} - 10 = 18(18^n - 10 + 10) - 10 = 18(18^n - 10) + 170$. Il suffit donc de poser $a = 18$ et $b = 170$ pour vérifier la définition.

Erreurs fréquentes :
— Oublier les quantificateurs dans la définition, ou les mettre dans le mauvais ordre.
— Écrire que la définition est vérifiée en posant $a = 18$ et $b = -10$, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 18\,u_n - 10$. Ceci est bien sûr faux.

6. Énoncer et démontrer le théorème du cours relatif aux suites arithmético-géométriques.

Rédaction. Soient a et b des réels et soit (u_n) une suite de réels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Soit x un réel tel que $x = ax + b$. Alors la suite (v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - x$ est géométrique de raison a.
Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - x = (au_n + b) - (ax + b) = au_n - ax + b - b = a(u_n - x) + 0 = av_n.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = av_n$. Par définition, la suite (v_n) est donc géométrique de raison a.

Erreur fréquente : Hors-sujet en parlant de suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *arithmétique*. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k$ lorsque a et b deux entiers naturels tels que $a \leq b$. Démontrer ce résultat.

Rédaction. $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = (b-a+1)\frac{u_a+u_b}{2}$.
Voir le cours pour la démonstration.

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k$ lorsque a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leq b$.
Démontrer le résultat correspondant pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Rédaction. Si $q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = b-a+1$. Si $q \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a\frac{1-q^{b-a+1}}{1-q}$.
Voir la démonstration du cours pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.