Démonstrations directes

Dans ce qui suit, les lettres P, P_1 et P_2 désignent des phrases mathématiques quelconques et A est un ensemble.

Structure de l'énoncé	Comment le démontrer ?	Que peut-on en déduire ?
non(P)	Prendre P pour hypothèse, puis prouver une contradiction : ***Supposons*** *P. Alors [...]* *Ceci est contradictoire, donc* non(P).	Si on sait déjà que P est vraie, on obtient une contradiction : *Nous avons à la fois P et* non(P)*, donc il y a une contradiction.*
Pour tout $x \in A$, $P(x)$. $(\forall x \in A,\ P(x))$	Introduire $x \in A$ quelconque, puis prouver $P(x)$: ***Soit*** *$x \in A$. Alors [...] donc $P(x)$.* *Ceci prouve que, pour tout $x \in A$, $P(x)$.*	Si un élément a de A a déjà été introduit, déduire $P(a)$: *Nous savons que, pour tout $x \in A$, $P(x)$.* *Or $a \in A$, donc $P(a)$.*
Il existe $x \in A$ tel que $P(x)$. $(\exists x \in A,\ P(x))$	Exhiber un élément $a \in A$ qui vérifie $P(a)$: ***Posons*** *$a =$ [...] Alors [...] donc $a \in A$ et $P(a)$.* *Ceci prouve qu'il existe $x \in A$ tel que $P(x)$.*	Introduire un élément $a \in A$ qui vérifie $P(a)$: *Nous savons qu'il existe $x \in A$ tel que $P(x)$.* *Posons a un tel élément de A. Alors $P(a)$.*
Si P_1, alors P_2. $(P_1 \implies P_2)$	Prendre P_1 pour hypothèse, puis prouver P_2 : ***Supposons*** *P_1. Alors [...] et donc P_2.* *Ceci prouve que si P_1, alors $P2$.*	Si on sait déjà que P_1 est vraie, déduire P_2 : *Nous savons que si P_1, alors P_2.* *Or P_1, donc P_2.*
P_1 et P_2 (P_1 et P_2)	Prouver P_1, puis prouver P_2 : *[...] donc P_1.* *[...] donc P_2.*	Déduire P_1 ou déduire P_2 : (au choix, $i = 1$ ou $i = 2$) *Nous savons que P_1 et P_2, donc en particulier P_i.*
P_1 ou P_2 (P_1 ou P_2)	Prouver P_1 ou prouver P_2 : (au choix, $i = 1$ ou $i = 2$) *[...] donc P_i.* *Donc en particulier, P_1 ou P_2.*	Prouver un énoncé P par disjonction de cas : *Nous savons que P_1 ou P_2.* 1er cas : *si P_1. Alors [...] et donc P.* 2e cas : *si P_2. Alors [...] et donc P.*
P_1 si et seulement si P_2. $(P_1 \iff P_2)$	Prouver les deux implications : ***Supposons*** *P_1. Alors [...] et donc P_2.* ***Supposons*** *P_2. Alors [...] et donc P_1.*	Si l'une des phrases est vraie, déduire l'autre : $(i \neq j)$ *Nous savons que P_1 si et seulement si P_2.* *Or P_i, donc P_j.*