Unicité d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

E1A 2016-2017

à rendre lundi 17 octobre

Objectif

Démontrer la proposition du cours selon laquelle une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation donnée est définie de façon unique par ses deux premiers termes.

Énoncé de l'exercice

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui vérifient la même équation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a\,v_{n+2} + b\,v_{n+1} + c\,v_n = 0 \end{aligned}$$

On suppose de plus que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$.

Indications

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, montrer que $u_{k+2} - v_{k+2} = \dfrac{b}{a}(v_{k+1} - u_{k+1}) + \dfrac{c}{a}(v_k - u_k)$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété ($u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$).

   Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.
3. Conclure.

Commentaires

Il faut retenir la technique mise en œuvre ici qui consiste à prendre comme hypothèse de récurrence une condition sur *deux* rangs consécutifs. Elle porte le nom de *récurrence double*.

Facultatif (pour mieux comprendre le résultat)

Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinctes telles que $u_0 = v_0$ et qui vérifient une même relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Solution

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $au_{k+2} + bu_{k+1} + cu_k = 0$ et $a \neq 0$, donc $u_{k+2} = -\frac{b}{a}u_{k+1} - \frac{c}{a}u_k$. On obtient de même $v_{k+2} = -\frac{b}{a}v_{k+1} - \frac{c}{a}v_k$. Donc finalement,

$$u_{k+2} - v_{k+2} = -\frac{b}{a}u_{k+1} - \frac{c}{a}u_k - \left(-\frac{b}{a}v_{k+1} - \frac{c}{a}v_k\right) = \frac{b}{a}(v_{k+1} - u_{k+1}) + \frac{c}{a}(v_k - u_k).$$

2. • *Initialisation.* Démontrons $\mathcal{P}_0$, c'est-à-dire que $(u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1)$. Ceci est vrai d'après l'énoncé de l'exercice donc il n'y a rien de plus à faire.

   • *Hérédité.* Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1})$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire que $(u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1})$, et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Il s'agit de prouver que $u_{n+1} = v_{n+1}$ et $u_{n+2} = v_{n+2}$. La première égalité découle directement de l'hypothèse. Pour prouver la seconde, on remarque que d'après la question précédente,

$$u_{n+2} - v_{n+2} = \frac{b}{a}(v_{n+1} - u_{n+1}) + \frac{c}{a}(v_n - u_n).$$

   Or $v_{n+1} - u_{n+1} = 0$ et $v_n - u_n = 0$ car $u_{n+1} = v_{n+1}$ et $u_n = v_n$. On en déduit que $u_{n+2} - v_{n+2} = 0 + 0 = 0$, et donc $u_{n+2} = v_{n+2}$. Nous avons donc prouvé $\mathcal{P}_{n+1}$.

   • *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, nous avons démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce que nous avons prouvé à la question précédente, $\mathcal{P}_n$ est vraie. Donc $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. En particulier, $u_n = v_n$.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. Les deux suites sont donc égales.

Question facultative

Il y a une infinité de choix possibles. Considérons par exemple les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$ et $v_n = 1$. Elles sont clairement distinctes, bien que $u_0 = v_0 = 1$. De plus, (u_n) vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

et (v_n) vérifie la même relation de récurrence. Vérifions-le.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2^{n+2} - 3 \times 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2^{n+1}(2 - 3 + 1) = 0.$$

Pour la suite (v_n), on calcule de même

$$v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 1^{n+2} - 3 \times 1^{n+1} + 2 \times 1^n = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Remarque. On peut en fait trouver des exemples pour n'importe quelle relation de récurrence. On a seulement choici celle-ci pour sa simplicité : elle est associée au polynôme du second degré $(X - 2)(X - 1) = X^2 - 3X + 2$ dont les réels 2 et 1 sont les deux racines.