Effet d'un décalage sur le graphe d'une fonction

E1A 2016-2017

Résumé. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et soit c un réel.

- Une translation verticale de $+c$ transforme le graphe de f en le graphe de $x \mapsto f(x) + c$.
- Une translation horizontale de $-c$ transforme le graphe de f en le graphe de $x \mapsto f(x + c)$.

Prérequis. Le graphe de f est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = f(x)$.

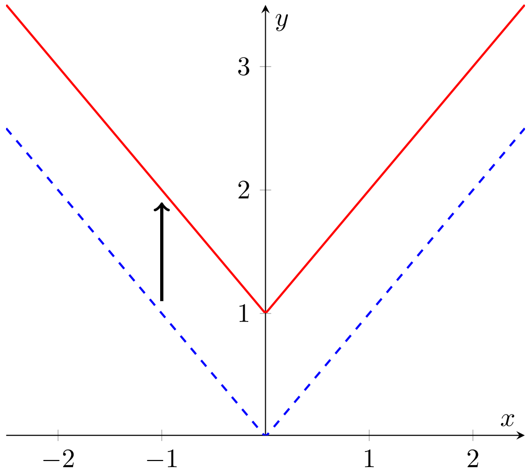
Décalage des images

Notons g la fonction $x \mapsto f(x) + c$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y + c = f(x) + c \\ &\iff y + c = g(x). \end{aligned}$$

Autrement dit, le point (x, y) est sur le graphe de f si et seulement si le point $(x, y + c)$ est sur le graphe de g. On passe donc du premier au deuxième par la translation de vecteur $(0, c)$.

Exemple : $x \mapsto |x|$ en bleu et $x \mapsto |x| + 1$ en rouge.



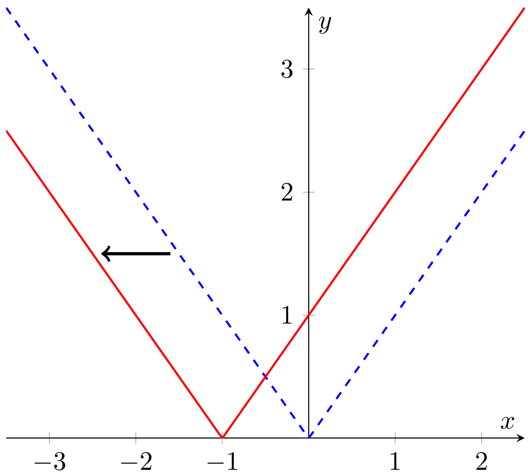
Décalage des antécédents

Notons h la fonction $x \mapsto f(x + c)$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = f(x - c + c) \\ &\iff y = h(x - c). \end{aligned}$$

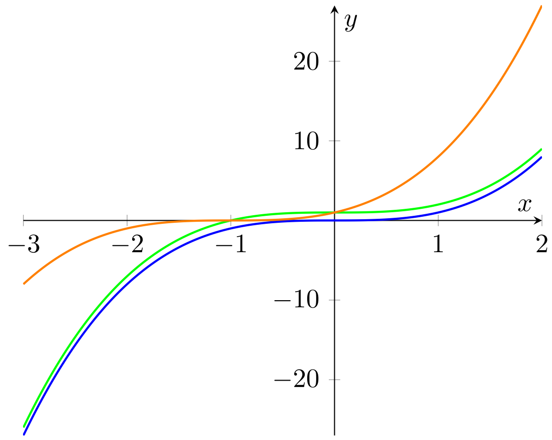
Autrement dit, le point (x, y) est sur le graphe de f si et seulement si le point $(x - c, y)$ est sur le graphe de h. On passe donc du premier au deuxième par la translation de vecteur $(-c, 0)$.

Exemple : $x \mapsto |x|$ en bleu et $x \mapsto |x + 1|$ en rouge.



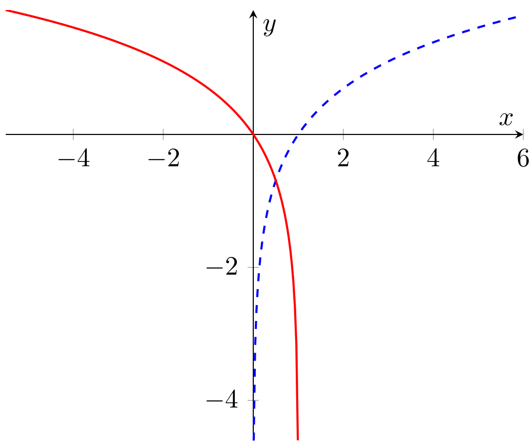
Exercice XI

On demande de tracer sur une même figure les graphes des fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^3 + 1$ et $x \mapsto (x+1)^3$. Voici le résultat. Le premier est tracé en bleu. Le deuxième est tracé en vert : il s'en déduit par translation de $(0, 1)$. Le troisième est tracé en orange : il se déduit du premier par translation de $(-1, 0)$.



Généralisations

D'autres transformations de nature différente sont possibles. La deuxième question de l'exercice XI abordait notamment le passage de $x \mapsto \ln(x)$ à $x \mapsto \ln(1-x)$. La transformation concernée est alors une symétrie axiale :



Remarquons que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le domaine de définition $]0; +\infty[$ subit lui aussi la transformation $x \mapsto 1 - x$. Il est envoyé sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ qui est bien le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$

On peut encore imaginer bien d'autres transformations. Par exemple, comment obtient-on le graphe de la fonction $x \mapsto f(x+3) - 2$ à partir du graphe de f ? le graphe de $x \mapsto |f(x)|$? le graphe de $x \mapsto f(3x)$? etc.

Exercice. Traiter ces exemples avec la fonction $f : x \mapsto x$ puis avec la fonction $f : x \mapsto |x|$.