Correction de l'exercice VIII

Nous présentons en fait trois solutions différentes, qui aboutissent bien sûr au même résultat. Vous devez les comprendre et savoir les refaire toutes les trois. Chaque solution a ses avantages et ses inconvénients :

- Les méthodes 1 et 1bis (similaires) procèdent par équivalence. Ceci nécessite d'être particulièrement rigoureux (vérifier qu'on a bien $A \iff B$ et pas seulement $A \implies B$).
- La méthodes 2 procède par analyse-synthèse. On ne soucie pas des réciproques dans l'*analyse*, mais on comble cette lacune avec la *synthèse*. Les calculs sont plus difficiles.

Lisez ce document jusqu'au bout en refaisant vous-mêmes les calculs au brouillon.

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2} = -x$, d'inconnue x.

Domaine de définition

Quelle que soit la méthode que vous employez, votre premier réflexe doit être de déterminer pour quelles valeurs de x l'équation a un sens.

- Pour que $\sqrt{x}$ soit défini, il faut que $x \geq 0$.
- Pour que $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ soit défini, il faut que $x \geq 0$ et $\sqrt{x} - 2 \neq 0$.

Le domaine de définition est donc l'ensemble des $x \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sqrt{x} - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+ \setminus \{4\}$. Notons D ce domaine dans la suite du document.

Méthode 1 : changement d'inconnue

On utilise le changement d'inconnue $y = \sqrt{x} - 2$. Pour tout x dans le domaine, $x = (\sqrt{x} - 2 + 2)^2$, donc x est solution de l'équation si et seulement si $y = \sqrt{x} - 2$ (qui est non nul) vérifie

$$\frac{1}{y} = -(y+2)^2 = -(y^2 + 4y + 4),$$

ce qui équivaut à $y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 0$ puisque $y \neq 0$. Ainsi, $x \in D$ est solution si et seulement si $\sqrt{x} - 2$ est racine du polynôme $P = X^3 + 4X^2 + 4X + 1$.

Le polynôme P admet -1 comme racine *évidente* puisque $(-1)^3 + 4(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1 + 4 - 4 + 1 = 0$, donc on peut le factoriser par $(X+1)$ et on obtient[1]

$$P = (X+1)(X^2 + 3X + 1)$$

Le discriminant de $X^2 + 3X + 1$ vaut $9 - 4 = 5$, donc il admet $a = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ comme racines et on obtient une factorisation complète de P :

$$P = (X+1)(X-a)(X-b)$$

Les racines de P sont donc $-1, a$ et b. D'après ce qui précède, les solutions de l'équation sont donc les réels $x \in D$ tels que $\sqrt{x} - 2 \in \{-1, a, b\}$. Il reste à voir lesquelles de ces trois valeurs peuvent effectivement être obtenues.

- Pour tout $x \in D$, $\sqrt{x} - 2 = -1$ si et seulement si $\sqrt{x} = 1$. La seule valeur de $x \in D$ pour laquelle $\sqrt{x} - 2 = -1$ est donc 1.
- Pour tout $x \in D$, $\sqrt{x} - 2 = a$ si et seulement si $\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est positif donc il y a une unique valeur de x pour laquelle $\sqrt{x} - 2 = a$, qui est

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

- Pour tout $x \in D$, $\sqrt{x} - 2 = b$ si et seulement si $\sqrt{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Or $1 - \sqrt{5} < 0$ donc il n'existe aucun $x \in D$ tel que $\sqrt{x} - 2 = b$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{1, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Méthode 1 bis : changement d'inconnue (de Nour)

On va utiliser le changement d'inconnue $z = \sqrt{x}$. Pour tout x dans le domaine, $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, donc x est solution si et seulement si $z = \sqrt{x}$ vérifie

$$\frac{1}{z-2} = -z^2,$$

ou encore $z^2(z-2) + 1 = z^3 - 2z^2 + 1 = 0$ (puisque $z - 2 \neq 0$). Ainsi, $x \in D$ est solution si et seulement si $\sqrt{x}$ est racine du polynôme $Q = X^3 - 2X^2 + 1$.

Ce polynôme admet 1 comme racine évidente et on peut donc le factoriser par $X - 1$:

$$Q = (X-1)(X^2 - X - 1).$$

Le discriminant de $X^2 - X - 1$ est $1 - (-4) = 5$, donc ses racines sont $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On obtient la factorisation complète

$$Q = (X-1)(X-\phi)(X-\psi)$$

[1] par la méthode de votre choix : identification, division euclidienne ou calcul mental

Pour tout $x \in D$, la règle du produit nul montre donc que x est solution de l'équation si et seulement si
$$\sqrt{x} = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = \phi \text{ ou } \sqrt{x} = \psi.$$

Il reste à voir à quelles valeurs correspondent ces trois cas :

- Pour tout $x \in D$, $\sqrt{x} = 1$ si et seulement si $x = 1$.
- Pour tout $x \in D$, $\sqrt{x} = \phi$ si et seulement si $x = \phi^2$ (car $\phi \geq 0$). De plus,
$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$
- Il n'existe aucun $x \in D$ tel que $\sqrt{x} = \psi$ car $\psi < 0$.

Finalement, l'ensemble des solutions est donc $\left\{1, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Méthode 2 : analyse-synthèse

Commençons par réécrire l'équation. Pour tout $x \in D$,
$$\frac{1}{\sqrt{x}-2} = -x \iff 1 = -x(\sqrt{x}-2) \iff x\sqrt{x} = 2x - 1.$$

Analyse

Soit $x \in D$ une solution de l'équation. Puisque $(x\sqrt{x})^2 = x^2(\sqrt{x})^2 = x^3$, on a alors $x^3 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ d'après ce qui précdède. Ceci montre que x est racine du polynôme $R = X^3 - 4X^2 + 4X - 1$.

Ce dernier admet 1 comme racine évidente, et peut donc être factorisé par $X - 1$:
$$R = (X-1)(X^2 - 3X + 1).$$

De plus le discriminant de $X^2 - 3X + 1$ vaut $9 - 4 = 5$, donc ses racines sont $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et on obtient la factorisation complète :
$$R = (X-1)(X-\alpha)(X-\beta).$$

Puisque x est racine, $R(x) = 0$ et on a donc d'après la règle du produit nul : $x \in \{1, \alpha, \beta\}$.

Synthèse

On vient de voir que si $x \in D$ est solution de l'équation, alors $x \in \{1, \alpha, \beta\}$. Il reste à éliminer les éléments de $\{1, \alpha, \beta\}$ qui ne sont pas dans D ou qui ne sont pas solution de l'équation :

- On a bien $1 \in D$. De plus $\frac{1}{\sqrt{1}-2} = \frac{1}{-1} = -1$. Donc 1 est bien solution de l'équation.

- On a bien $\alpha \in D$ et même $5/2 < \alpha < 3$ car $2 < \sqrt{5} < 3$. Puisque α est racine de R,

$$\alpha^3 = 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = (2\alpha - 1)^2.$$

  Or $2\alpha - 1 = 2 + \sqrt{5} > 0$, donc $\alpha\sqrt{\alpha} = \alpha^{3/2} = 2\alpha - 1$. On a déjà vu que ceci équivaut à $\frac{1}{\sqrt{\alpha}-2} = -\alpha$ car $\alpha \in D$, donc α est bien une solution.

- On a bien $\beta \in D$ et même $0 < \beta < 1/2$ car $3 < \sqrt{5} < 4$. Puisque β est racine de R,

$$\beta^3 = 4\beta^2 - 4\beta + 1 = (2\beta - 1)^2.$$

  Mais $2\beta - 1 = 2 - \sqrt{5} < 0$, donc $\beta\sqrt{\beta} = \sqrt{\beta^3} = -(2\beta - 1)$. Or $-(2\beta - 1) \neq (2\beta - 1)$ donc ceci montre que β n'est pas solution.

Finalement les solutions de l'équation sont donc 1 et $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque sur les calculs

Nous n'avons pas eu besoin de calculer $\frac{1}{\sqrt{\beta}-2}$ pour conclure dans la méthode 2, mais il est utile de savoir le faire assez rapidement. Voyons comment : on va repartir de l'égalité $\beta\sqrt{\beta} = -(2\beta - 1)$ à partir de laquelle nous avons éliminé β ci-dessus. Ceci donne $\beta(\sqrt{\beta} - 2) = 1 - 4\beta$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}-2} = \frac{\beta}{1-4\beta} = \frac{3-\sqrt{5}}{2(1-2(3-\sqrt{5}))} = \frac{3-\sqrt{5}}{2(2\sqrt{5}-5)} = \frac{(3-\sqrt{5})(2\sqrt{5}+5)}{2(2\sqrt{5}-5)(2\sqrt{5}+5)} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Nous avons multiplité ici $2\sqrt{5} - 5$ par la *quantité conjuguée* $2\sqrt{5} + 5$ afin d'éliminer les racines du dénominateur via l'identité remarquable $(2\sqrt{5} - 6)(2\sqrt{5} + 5) = (2\sqrt{5})^2 - 5^2 = -5$.

Si $-\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ était égal à $-\beta = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$, on aurait $5 + \sqrt{5} = 5(3 - \sqrt{5})$ et donc $\sqrt{5} = 3$ après simplifications. Ceci est absurde car $3^2 \neq 5$.

> *On retiendra de tout ceci que si un nombre x est racine d'un polynôme P, alors la relation $P(x) = 0$ permet de simplifier les calculs algébriques faisant intervenir x.*

Donnons-en un autre exemple plus simple : dans la méthode 1bis, nous sommes amenés à calculer ϕ^2. Or on sait que ϕ est racine du polynôme $X^2 - X - 1$ (on a obtenu ϕ comme ceci) donc on a directement la relation $\phi^2 = \phi + 1$, qui fournit très rapidement le résultat.