Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1
(4 heures)

E1A

24 septembre 2016

Consignes générales :

— *Toutes les réponses doivent être justifiées par une démonstration.*

— *La clarté de la rédaction et la présentation joueront un rôle déterminant dans l'appréciation de votre copie.*

— *Indiquez clairement la numérotation des questions, mais ne recopiez pas l'énoncé.*

— *Utilisez un brouillon et relisez-vous.*

Exercice 1 : calculs élémentaires

Soit x un réel.

1.1 Factoriser l'expression $A = (2x-1)(x+2) - (2x+1)(2x-1)$.

1.2 Développer l'expression $B = (2x-3)^2$.

1.3 Factoriser l'expression $C = (6x-3)(x+7) + (-x+2)(2x-1)$.

1.4 Développer l'expression $D = (-x+3)(-x-2)$.

1.5 Mettre sous forme irréductible $\dfrac{15}{3} - \dfrac{3}{15}$.

1.6 Simplifier au maximum $\sqrt{52}$.

1.7 Factoriser l'expression $E = (\sqrt{6}x - \sqrt{3})(-x+6) + (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{3}x + 4)$.

1.8 Pour quelles valeurs de x l'expression $\sqrt{16 - x^2}$ a-t-elle un sens ?

1.9 Simplifier au maximum l'expression suivante : $\dfrac{\sqrt{\frac{15}{2} + \frac{10}{3}} \times \sqrt{\frac{15}{2} - \frac{10}{3}}}{\left(\sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \times \left(\sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)}$.

Exercice 2 : compréhension

On répondra à ces questions en donnant un exemple (le plus simple possible) et en vérifiant qu'il convient, ou en démontrant qu'il n'en existe pas.

Existe-t-il dans $\mathbb{R}[X]$ ...

2.1 un polynôme de degré 4 dont le coefficient de degré 3 est 2 ?

2.2 un polynôme de degré 2 dont le coefficient de degré 3 est 4 ?

2.3 deux polynômes égaux dont les coefficients sont tous distincts ?

2.4 deux polynômes de degré 3 dont le produit est de degré 6 ?

2.5 deux polynômes de degré 6 dont la somme est de degré 3 ?

2.6 un polynôme de degré 4 qui n'admet aucune racine ?

2.7 un polynôme de degré 4 qui admet une seule racine ?

2.8 un polynôme de degré 4 qui admet exactement quatre racines distinctes ?

2.9 un polynôme de degré 4 qui admet six racines distinctes ?

2.10 un polynôme dont tous les nombres entiers sont des racines ?

Exercice 3 : trois équations

Préciser le domaine de définition puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes, d'inconnues respectives x, y et z.

$$x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6} + 6}, \tag{1}$$

$$y + \frac{2}{6 - \frac{3}{y-1}} = 1, \tag{2}$$

$$\sqrt{z+1} + \sqrt{z-3} - \sqrt{3z-1} = 0. \tag{3}$$

Exercice 4 : rationnalité

Rappelons qu'un réel x est rationnel *s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$.*
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels. Un réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

3.1 Montrer que tout nombre entier est rationnel.

3.2 Montrer que pour tout x non nul, si x est rationnel alors $1/x$ est rationnel.

3.3 Soient x et y rationnels.

(a) Montrer que $x \times y$ est rationnel.

(b) Montrer que $x + y$ est rationnel.

3.4 Démontrer que pour tous x rationnel et y irrationnel, le nombre $x+y$ est irrationnel. On pourra procéder par l'absurde.

3.5 On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Le nombre $\sqrt{24 - 9\sqrt{2}}$ est-il rationnel ?

3.6 Est-il vrai que pour tous x et y irrationnels, le nombre $x \times y$ est irrationnel ?

3.7 Est-il vrai que pour tous x et y irrationnels, le nombre $x + y$ est irrationnel ?

Problème

Attention, les questions ne sont pas indépendantes.

L'objectif de ce problème est de trouver une méthode générale pour résoudre les équations polynomiales du troisième degré.

A. Préliminaires : somme et produit de deux réels

Soient u, v, σ_1, σ_2 des réels tels que $u + v = \sigma_1$ et $uv = \sigma_2$.

A.1 Identifier les coefficients du polynôme $(X - u)(X - v)$.

A.2 En déduire les racines du polynôme $X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2$.

A.3 *Application.* Trouver deux réels x et y tels que $x + y = 9$ et $xy = 19$.
(indication : on pourra résoudre une équation du second degré bien choisie)

A.4 Soient a, b deux réels. Montrer que $a^2 \geq 4b$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe x et y réels tels que $x + y = a$ et $xy = b$.

A.5 *Application.* Existe-t-il x et y réels tels que $x + y = 9$ et $xy = 24$?

B. Méthode de Cardan

Soient a, b, c, d des réels avec $a \neq 0$.

B.1 Déterminer trois réels p, q, r tels que

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = a\left[(X+r)^3 - 3p(X+r) - q\right].$$

B.2 En déduire que pour tout x réel, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ si et seulement si $x + r$ est racine du polynôme

$$X^3 - 3pX - q.$$

On notera P ce polynôme dans la suite du problème.

B.3 Soient u et v des réels. Montrer que $P(u+v) = (u^3 + v^3 - q) + 3(uv - p)(u+v)$.

B.4 En déduire une condition *suffisante* sur $u^3 + v^3$ et uv pour que $P(u+v) = 0$.

B.5 À quelle condition sur p et q peut-on trouver de cette façon une racine de P ?

C. Application de la méthode

Soit $P = X^3 - 30X - 133$.

C.1 Trouver deux réels u et v tels que $u^3 + v^3 = 133$ et $uv = 10$.
(indication : penser à la partie A)

C.2 En déduire que 7 est racine de P.

C.3 Déterminer toutes les racines de P.

C.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 18x = 12x^2 + 77$, d'inconnue x.

Fin