Devoir surveillé n° 8

E1A 2016–2017

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du passible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Consignes particulières. Ce devoir comporte une première partie, composée uniquement de questions de cours, que vous devez rédiger sur une copie indépendante, à déposer au coin de votre table. Elle sera ramassée à 8h30. Vous n'êtes pas obligés d'y consacrer 30 minutes mais je vous recommande tout de même de commencer par là. Vous débuterez cette copie par les mots « j'ai lu les consignes » afin de montrer que vous avez bien tout lu.

Questions de cours (à rendre après 30 minutes)

On ne demande aucune justification dans cette partie.
La lettre X désigne une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle ? (définition)
2. Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle ? (définition)
3. Lister les propriétés des fonctions de répartition.
4. Pour quels p la loi $\mathcal{G}(p)$ est-elle bien définie ?
   Donner son support, sa définition, son espérance et sa variance.
   Dans quelle situation reconnaît-t-on la loi $\mathcal{G}(p)$?
5. Soient a et b deux réels. Que désigne la notation $[X \leqslant a]$? (définition)
   Soit ω une issue. À quelle condition a-t-on $\omega \in [a < X < b]$?
6. Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_{2016})$ des évènements mutuellement indépendants, chacun de probabilité $\frac{1}{4}$, et soit Z la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $i \in [\![1, 2016]\!]$ tels que A_i est réalisé.
   Quelle est la loi de Z ? son support ? sa définition ? son espérance ? sa variance ?
7. Soit D un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ et $(p_x)_{x \in D}$ une famile de réels. À quelle(s) condition(s) existe-t-il une variable aléatoire réelle X sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = D \qquad \text{et} \quad \forall x \in D,\ \mathbb{P}([X = x]) = p_x \quad ?$$

8. À quelle condition $\mathbb{V}(X)$ est-elle définie ? Quelle est sa définition ? son interprétation ?
   Rappeler la formule de König-Huygens.

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

9. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
10. (a) Écrire une fonction *Scilab* nommée `calculeTerme` telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'appel de cette fonction `calculeTerme(`n`)` renvoie en sortie la valeur de u_n.
    (b) En déduire un programme, rédigé en *Scilab*, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
11. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.
    (a) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
    (b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.
    (c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.
12. On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.
    (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$.
    (b) Utiliser le résultat admis pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
    (c) Déterminer la nature de la série de terme général v_n.

Exercice 2

13. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.
    On considère désormais la fonction f définie par :
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$
14. Établir que f est impaire.
15. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
    (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
16. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2 + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
    $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
    (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
    (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
    (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
17. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
    (b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
    (c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
18. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

(a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$

(c) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

(d) Montrer que l'on a aussi : $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Problème

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

19. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

20. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

(c) Utiliser la question 19 pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

21. Reconnaître la loi de N.

22. (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

(b) Compléter les commandes *Scilab* suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p=input('donner la valeur de p')
N=grand(1,1,'geom', ---) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin',---) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if ------ then disp('------'), else disp('------'), end
```

23. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$.
   (b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$.
   (c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.
   (d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

24. (a) Justifier que $P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)$.
   En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

   (b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$.

25. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt = 0$.
   (b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt\right)$$

   (c) En déduire que : $P(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$.

26. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

   (b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.
   (c) En déduire que $P(A) > \dfrac{1}{2}$.