Devoir surveillé n° 8 : correction

E1A 2016–2017

Questions de cours (à rendre après 30 minutes)

On ne demande aucune justification dans cette partie.
La lettre X désigne une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle ? (définition)

   Solution. C'est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$.

2. Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle ? (définition)

   Solution. C'est la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par $x \mapsto \mathbb{P}([X \leqslant x])$.

3. Lister les propriétés des fonctions de répartition.

   Solution. La fonction F vérifie :
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
   — F est croissante sur $\mathbb{R}$.
   — $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
   — F est continue à droite.

4. Pour quels p la loi $\mathcal{G}(p)$ est-elle bien définie ?
   Donner son support, sa définition, son espérance et sa variance.
   Dans quelle situation reconnaît-t-on la loi $\mathcal{G}(p)$?

   Solution. La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est définie pour tout $p \in]0,1]$. Son support est $\mathbb{N}^*$, et X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1}p$. Son espérance est $\dfrac{1}{p}$ et sa variance $\dfrac{1-p}{p^2}$.
   Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants tels que $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(A_n) = p$. Soit X la variable aléatoire qui donne le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que A_n est réalisé. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

5. Soient a et b deux réels. Que désigne la notation $[X \leqslant a]$? (définition)
   Soit ω une issue. À quelle condition a-t-on $\omega \in [a < X < b]$?

   Solution. Par définition, l'évènement $[X \leqslant a]$ est le sous-ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ de Ω.
   On a : $\omega \in [a < X < b] \iff a < X(\omega) < b$.

6. Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_{2016})$ des évènements mutuellement indépendants, chacun de probabilité $\frac{1}{4}$, et soit Z la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $i \in [\![1, 2016]\!]$ tels que A_i est réalisé.
   Quelle est la loi de Z ? son support ? sa définition ? son espérance ? sa variance ?

   Solution. Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2016, \frac{1}{4})$. Son support est $[\![0, 2016]\!]$ et pour tout k dans le support,
   $$\mathbb{P}([Z = k]) = \binom{2016}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2016-k}.$$
   Son espérance est $2016 \times \frac{1}{4} = 504$ et sa variance $2016 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 378$.

7. Soit D un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ et $(p_x)_{x\in D}$ une famile de réels. À quelle(s) condition(s) existe-t-il une variable aléatoire réelle X sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = D \qquad \text{et} \quad \forall x \in D,\ \mathbb{P}([X = x]) = p_x \quad ?$$

Solution. Une telle variable aléatoire existe si et seulement si : $(\forall x \in D,\ p_x \geqslant 0)$ et $\sum\limits_{x\in D} p_x = 1$.

8. À quelle condition $\mathbb{V}(X)$ est-elle définie ? Quelle est sa définition ? son interprétation ?
Rappeler la formule de König-Huygens.

Solution. $\mathbb{V}(X)$ est définie si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. De plus, on a alors : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. La variance mesure la dispersion de la loi de X. La formule de König-Huygens est : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

Exercice 1 (d'après EDHEC 2012 et 2013, voie E)

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

9. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Solution. On montre l'encadrement par récurrence.
Pour $n = 0$, c'est bien vérifié car $u_0 = 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que l'encadrement est vrai au rang n. Montrons qu'il est alors vrai au rang $n+1$: comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1$ (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$). Donc $1 \leqslant u_n^2 + 1 \leqslant 2$, d'où $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ en divisant par 2. Par conséquent, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui termine la preuve de l'hérédité.
$\boxed{\text{Conclusion : d'après le principe de récurrence, on pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1.}$

(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2}$$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

(c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Solution. La suite (u_n) est croissante (question précédente) et majorée par 1 (question 1.(a)). D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.
Appelons ℓ sa limite. Alors, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$, on obtient $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$.
Donc (en multipliant par 2) : $2\ell = \ell^2 + 1$, c'est-à-dire $\ell^2 + 1 - 2\ell = 0$, ou encore : $(\ell-1)^2 = 0$.
On en déduit que $\ell - 1 = 0$, i.e $\ell = 1$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

10. (a) Écrire une fonction *Scilab* nommée `calculeTerme` telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'appel de cette fonction `calculeTerme(`n`)` renvoie en sortie la valeur de u_n.

Solution.

```
function u = calculeTerme(n)
  u = 0
  for k=1:n
    u = (u^2+1)/2
  end
endfunction
```

(b) En déduire un programme, rédigé en *Scilab*, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

Solution. Il s'agit d'itérer la valeur de n, en partant de 0, jusqu'à ce qu'une certaine inégalité soit satisfaite : on utilisera donc une boucle `while`, avec la condition $1 - u_n \geqslant 10^{-3}$ (ceci est suffisant car on a toujours $1 - u_n > 0$). On peut obtenir les termes de la suite à l'aide de la fonction `calculeTerme`, mais il est en fait plus économe de les recalculer de proche en proche (ceci évite de repartir de 0 à chaque itération). Voici le programme :

```
n = 0
u = 0

while (1 - u >= 10^(-3)) // Test sur u(n)
  n = n + 1
  u = (u^2 + 1)/2        // Calcul de u(n+1)
end

disp(n)
```

11. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

Solution. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_k - v_{k+1} = (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k = \frac{u_k^2 + 1}{2} - u_k = \frac{u_k^2 + 1 - 2u_k}{2} = \frac{(u_k - 1)^2}{2}.$$

C'est-à-dire : $\boxed{v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^2}{2}.}$

(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par simplifications télescopiques, on a directement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n-1+1} = \boxed{1 - v_n.}$$

(c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Solution. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} v_k^2 &= 2 \sum_{k=0}^{N} (v_k - v_{k+1}) && \text{(question 11.(a))} \\ &= 2(1 - v_{N+1}) && \text{(question précédente)} \end{aligned}$$

Or, $v_{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ (car $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ d'après la question 9.(c)). Donc $\sum_{k=0}^{N} v_k^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 2$.

$\boxed{\text{Conclusion : la série de terme général } v_n^2 \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2.}$

12. On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors on a : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

(a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 11.(a), $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n^2$. On en tire :

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - v_{n+1}}{v_{n+1}v_n} = \frac{\frac{1}{2}v_n^2}{(v_n - \frac{1}{2}v_n^2)v_n} = \frac{1}{2 - v_n}.$$

Or $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par opérations sur les limites : $\boxed{\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.}$

(b) Utiliser le résultat admis pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution. En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}$ on obtient $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \dfrac{1}{2}$ d'après le résultat admis et la questions précédente. Mais on a par ailleurs des simplifications télescopiques :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{nv_n} - \frac{1}{n}.$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que $\dfrac{1}{nv_n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j$ converge vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

En passant à l'inverse $\dfrac{v_n}{\frac{2}{n}} = \dfrac{nv_n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, d'où le résultat : $\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}.}$

(c) Déterminer la nature de la série de terme général v_n.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n}$ est positif. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs s'applique donc. D'après la question précédente, la série de terme général v_n et la série de terme général $\dfrac{2}{n}$ sont de même nature. Puisque la série harmonique diverge, il en est de même de la série de terme général $\dfrac{2}{n}$. Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } v_n \text{ est divergente.}}$

Exercice 2 (d'après EDHEC 2014, voie E)

13. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$ est définie pour tout réel x.

Solution. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $1 + t^2 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Donc, en particulier, quel que soit x réel, elle est définie et continue sur $[x; 2x]$ (ou $[2x; x]$ si $2x < x$).
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ est bien définie quel que soit x réel.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

14. Établir que f est impaire.

Solution. Pour tout x réel, on a $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$. On effectue alors le changement de variable affine $u = -t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}}(-du) \\ &= -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{f \text{ est une fonction impaire}}$.

15. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive g sur $\mathbb{R}$ (qui est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est continue). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \Big[g(t)\Big]_x^{2x} \\ &= g(2x) - g(x) \end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto g(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

(b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(2x) - g(x)$, avec g une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (cf question précédente). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2g'(2x) - g'(x)$, i.e :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

On étudie le signe de $f'(x)$. Pour cela, on met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{4+4x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe du numérateur. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant 1 + 4x^2 < 4 + 4x^2$. Donc, par stricte croissance de la racine carrée sur $[0; +\infty[$: $\sqrt{1+4x^2} < \sqrt{4+4x^2}$. Ceci implique $\sqrt{4+4x^2} - \sqrt{1+4x^2} > 0$ et donc $f'(x) > 0$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

16. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2 + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

Solution. Pour tout $t > 0$, on a :

$$0 < t^2 \leqslant t^2 + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$$

Donc, en prenant la racine carrée :

$$0 < t \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant t + 1$$

Puis l'inverse :

$$\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t}$$

Maintenant, soit $x > 0$ quelconque. Alors $0 < x < 2x$. Donc on peut intégrer l'encadrement ci-dessus sur l'intervalle $[x; 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

C'est-à-dire :

$$\Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x}$$

Et comme $\Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$ et $\Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$, on en déduit :

$$\boxed{\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)}$$

(b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(2x+1) - \ln(x+1) &= \left(\ln(x) + \ln\left(2 + \tfrac{1}{x}\right)\right) - \left(\ln(x) + \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)\right) \\ &= \ln\left(2 + \tfrac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et ln est continue, donc on obtient $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2) - \ln(1)$, c'est-à-dire : $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2)$ puisque $\ln(1) = 0$.

D'après la question précédente, on en déduit, par théorème d'encadrement : $\boxed{f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).}$

(c) Dresser le tableau de variation complet de f.

Solution. La fonction f est impaire et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2)$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\ln(2)$. On en déduit (avec la question 15.b) le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln(2)$ $\nearrow$	$\ln(2)$

(d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Solution. La fonction f est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$, i.e de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln(2); \ln(2)[$. Or, 0 appartient à $]-\ln(2); \ln(2)[$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a immédiatement $f(0) = 0$ (intégrale sur un intervalle réduit à un point).

Conclusion : $\boxed{\text{0 est l'unique solution solution réelle de l'équation } f(x) = 0.}$

17. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

— Si $x \geqslant 0$, alors on a immédiatement $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ car $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1 > 0$.

— Si $x < 0$, alors $0 < x^2 < x^2 + 1$. Donc, en prenant la racine carrée : $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, c'est-à-dire (puisque $x < 0$) : $-x < \sqrt{x^2+1}$. On en déduit que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

Donc, dans tous les cas, on a bien $\boxed{x + \sqrt{x^2+1} > 0 \text{ quel que soit } x \text{ réel.}}$

(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Solution. La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente), et elle y est dérivable (par opérations sur les fonctions dérivables). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après la formule de dérivation de $x \mapsto \ln(u(x))$:

$$h'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}.$$

Les $x + \sqrt{x^2+1}$ se simplifient et il reste : $\boxed{h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$

(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.

Solution. D'après la question précédente (et la définition de f), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \Big[h(t)\Big]_x^{2x} = h(2x) - h(x)$$

C'est-à-dire, d'après l'expression de h : $\boxed{f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).}$

18. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

(a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} dt$

Solution. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} 1\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt \end{aligned}$$

Ceci donne bien : $\boxed{x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt.}$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$

Solution. Soit $x > 0$ quelconque. Pour tout t réel, on a $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \geqslant 0$ (tous les termes qui interviennent dans la fraction sont positifs). Donc, en intégrant sur l'intervalle $[x; 2x]$ (on a bien $x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :

$$\int_x^{2x} 0\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt$$

C'est-à-dire (d'après la question précédente) :

$$\boxed{0 \leqslant x - f(x)}$$

Montrons maintenant l'autre inégalité. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2 + 1 \geqslant 1$ et donc $\sqrt{t^2+1} \geqslant 1$. Par conséquent :

$$\sqrt{t^2+1} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 2$$

En multipliant ces deux inégalités, on obtient alors :

$$\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \geqslant 2$$

Et on en déduit :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \frac{t^2}{2}$$

D'où, en intégrant sur l'intervalle $[x;2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{2}dt$$

C'est-à-dire :

$$x - f(x) \leqslant \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x}$$

Ou encore :

$$\boxed{x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3}$$

Conclusion : en combinant les deux inégalités démontrées ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3}$$

(c) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Solution. D'après l'encadrement ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{7}{6}x^3.$$

Donc, en divisant par x (qui est strictement positif) :

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1 + \frac{7}{6}x^2.$$

On en déduit que $\boxed{\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1,}$ ce qui peut encore s'écrire : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$.

(d) Montrer que l'on a aussi : $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Solution. Pour tout $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{-f(-x)}{x} && \text{(par imparité de } f\text{)} \\ &= \frac{f(-x)}{-x}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\dfrac{f(-x)}{-x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$ (car $-x$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers 0 par valeurs négatives).

Donc $\boxed{\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1,}$ ce qui peut encore s'écrire : $f(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} x$.

Remarque : On pouvait obtenir les résultats précédents plus facilement. En effet, par dérivabilité de la fonction f en 0, on a le développement limité à l'ordre 1 en 0 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$, c'est-à-dire (puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$) : $f(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Problème (EDHEC 2015 voie E)

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

19. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

Solution. Pour tout $t \in [0;x]$, on a $t^2 \leqslant x^2$, donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2 > 0$ (car $0 < x < 1$, qui implique $x^2 < 1$). Donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2 > 0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0 < \frac{1}{1-t^2} \leqslant \frac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0 \leqslant \frac{t^m}{1-t^2} \leqslant \frac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x 0 dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2} dt$$

C'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \int_0^x t^m dt$$

Or, $\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x \leqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}}$$

(b) En déduire que : $\lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

Solution. On a sans difficulté : $\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.}$$

20. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

Solution. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}.}$$

(b) En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

Solution. On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2} dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt.}$

(c) Utiliser la question 19 pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Solution. D'après la question 19.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a : $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt.}$

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt.$

Solution. Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 20.(b) et 20.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit : $\boxed{\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt.}$

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt.$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

21. Reconnaître la loi de N.

Solution. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.
Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p}$.

22. (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

Solution. La commande `floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :

— Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.

— Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k-1$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k - \frac{1}{2}$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k - 1$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k - 2 = m - 1 \neq m$.

Ainsi, on a montré que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

(b) Compléter les commandes *Scilab* suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p=input('donner la valeur de p')
N=grand(1,1,'geom', ---) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin',---) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if ------ then disp('------'), else disp('------'), end
```

Solution. la question posée n'entre pas tout à fait dans le cadre du programme officiel d'informatique, puisque la syntaxe précise de la fonction `grand` n'est pas admissible. On pouvait cependant compléter la fin à partir de la question précédente.
La réponse attendue était :

```
p=input('donner la valeur de p')
N=grand(1,1,'geom', p) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin', 1, N) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if 2*floor(X/2)==X then
  disp('le joueur a perdu')
else
  disp('le joueur a gagné')
end
```

23. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$.

Solution. Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0.}$

(b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$.

Solution. De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0.}$

(c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

Solution. Si k appartient à $[\![0; j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j}.}$

(d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

Solution. De même, si k appartient à $[\![0; j]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité : $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1}.}$

24. (a) Justifier que $P(X=2k+1)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=2k+1)$.
En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

Solution. Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N=n]\Big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X=2k+1)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=2k+1)}$$

Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1)=&\sum_{j=1}^{+\infty} P(N=2j)P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\&+\sum_{j=1}^{+\infty} P(N=2j+1)P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

On remplace $P(N=2j)$ et $P(N=2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1)&=\sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\&\quad+\sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\\&=\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\&\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ en se servant de la question 23 :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1)&=\frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\&\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\quad\text{(questions 23.a et 23.b)}\\&=\frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\frac{1}{2j}\\&\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\frac{1}{2j+1}\quad\text{(questions 23.c et 23.d)}\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\frac{p}{q}$ en facteur : $\boxed{P(X=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$.

(b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=2k+1) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$.

Solution. D'après la question 20.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) : $\boxed{P(X=2k+1) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt.}$

25. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$.

Solution. Pour tout $t \in [0;q]$, on a $t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q > 0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{1-q} \times \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (question I.19.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

Solution. On fait la somme en se servant du résultat de la question 24.(b) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n}t^{2k}\right)dt\end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}\times\frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) En déduire que : $P(A) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$.

Solution. L'événement A est l'événement « X est impair ». On a donc $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est l'événement « X est impair et $X \leqslant 2n+1$ ». De plus, $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille croissante d'événements. Par conséquent : $P(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$ n'est autre que $\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$P(A_n) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

On a donc : $P(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$.

C'est-à-dire, d'après la question 25.(a) : $\boxed{P(A) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt.}$

26. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

Solution. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t)+b(1-t)^2+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2)+b(1-2t+t^2)+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2+(-2b+c)t+(a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Afin que ceci soit égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, il suffit (identification) d'avoir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0 \\ -2b+c &=& 0 \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right. .$$

On résout ce système :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0 \\ -2b+c &=& 0 \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b \\ c &=& 2b \\ a+b+c &=& 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b \\ c &=& 2b \\ 4b &=& 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1/4 \\ c &=& 1/2 \\ b &=& 1/4 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, on a : $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{c}{(1-t)^2}$ avec

$$\boxed{a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{4} \text{ et } c = \frac{1}{2}.}$$

(b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

Solution. On reprend le résultat de la question 25.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant : $\boxed{P(A) = \dfrac{1-q}{4q}\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) + \dfrac{1}{2}.}$

(c) En déduire que $P(A) > \dfrac{1}{2}$.

Solution. On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in]0;1[$). On en déduit que $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$. De plus, $\dfrac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc $\dfrac{1-q}{4q}\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$.

On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente : $\boxed{P(A) > \dfrac{1}{2}.}$