Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 7

E1A 2016–2017

le 18 avril (deux heures)

La clarté de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.
On prendra bien soin de préciser toute notation utilisée non donnée dans l'énoncé. Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé, mais on fera figurer clairement les numéros des questions traitées.
Il n'est pas interdit d'admettre une question afin de ne pas rester bloqué, mais on le mentionnera sur sa copie.
L'usage des calculatrices est interdit.

Questions indépendantes (durée conseillée : 40 min)

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
   (a) Étudier cette fonction : domaine, parité, limites, variations.
   (b) Déterminer les points d'inflexion de f, ainsi que sa convexité.
2. (a) Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sqrt{\ln(x)}$.
   (b) Trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sqrt{\ln(x)}$ sur $[2, +\infty[$ qui s'annule en e.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^2 (2 - t)e^{-t}\, dt$.
4. (a) Trouver des réels a et b tels que $\dfrac{2}{u^2 - 1} = \dfrac{a}{u - 1} + \dfrac{b}{u + 1}$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{2x + 1}}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{2x + 1}$.
5. Déterminer la limite de la somme de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{k}{n} - \ln(n)}}{e^{\frac{k}{n}} + 1}$ pour $n \to \infty$.

Problème (durée conseillée : 1h20)

On considère les fonctions f et F définies pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = e^{-t^2/2}, \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Préliminaires

6. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de classe C^∞.
7. (a) Soit $x \geqslant 1$. Montrer que : $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \leqslant \int_1^x t\,e^{-t^2/2}\,dt$.

   (b) En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ F(x) \leqslant F(1) + e^{-1/2}$.

   (c) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Justifier qu'il existe un réel $L > 0$ tel que F admet L pour limite en $+\infty$.

   (d) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = -t$, que la fonction F est impaire.
   En déduire qu'elle admet une limite en $-\infty$, et préciser sa valeur.
8. On considère la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
$$G(x) = \frac{1}{2} + \frac{F(x)}{2L}.$$
   (a) Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$.

   (b) Montrer que la bijection réciproque $G^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0,1[$, avec :
$$\forall y \in]0,1[\,, \quad (G^{-1})'(y) = \frac{2L}{f(G^{-1}(y))}.$$

Inégalité isopérimétrique de Bobkov

Soient maintenant $H :]0,1[\to \mathbb{R}$ et $K :]0,1[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad H(y) = \frac{f(G^{-1}(y))}{2L} \quad \text{et} \quad K(y) = (G^{-1}(y))^2.$$

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$ et soit $c = \dfrac{a+b}{2}$.

9. Montrer que H est de classe C^2 et que : $\forall y \in]0,1[\,,\ H''(y) = -\dfrac{1}{H(y)}$.
10. En remarquant que $K = (H')^2$, en déduire que K est convexe sur $]0,1[$.

On considère $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall y \in]0,1[\,,\ h(y) = H(y)^2 + (y-c)^2 - H(c)^2$.

11. (a) En utilisant les questions 9 et 10, montrer que :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad h''(y) \geqslant 2K(c) + 2(y-c)K'(c).$$

    (b) En déduire que : $h(a) + h(b) \geqslant \dfrac{(a-b)^2}{2}\, K(c)$.

12. On admet l'inégalité suivante : $|h(a) - h(b)| \leqslant 2H(c)|H'(c)|\,|a-b|$.

    (a) Déduire de ce qui précède que $(h(a) - h(b))^2 \leqslant 8\, H(c)^2\, (h(a) + h(b))$.

    (b) Soient α et β deux réels non nuls. Déterminer les racines du polynôme

$$X^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)X + (\alpha^2 - \beta^2)^2.$$

    (c) Montrer enfin que $H\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{H(a)^2 + \dfrac{(a-b)^2}{4}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{H(b)^2 + \dfrac{(a-b)^2}{4}}$.