Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 7

E1A 2016–2017

le 18 avril (deux heures)

Questions indépendantes (durée conseillée : 40 min)

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$.

   (a) Étudier cette fonction : domaine, parité, limites, variations.

   Solution. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ par composition de limites. Par ailleurs, f est de classe C^∞ avec :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

   On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

   (b) Déterminer les points d'inflexion de f, ainsi que sa convexité.

   Solution. La fonction étant C^∞, on considère sa dérivée seconde :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{2(1+x^2)-(2x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

   Le signe de f'' montre que f est convexe sur $[-1, 1]$, concave sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$. Les points d'inflexion sont : 1 et -1.

2. (a) Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sqrt{\ln(x)}$.

   Solution. Le nombre $\frac{1}{x}\sqrt{\ln(x)}$ est bien défini si et seulements si les trois conditions suivantes sont vérifiées : $x \neq 0$, $x > 0$ et $\ln(x) \geqslant 0$. La fonction exp étant strictement croissante, ceci équivaut à $x \geqslant e^0 = 1$. Le domaine de définition est donc $\boxed{[1, +\infty[}$.

   (b) Trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sqrt{\ln(x)}$ sur $[2, +\infty[$ qui s'annule en e.

   Solution. On reconnaît la fonction $x \mapsto \ln'(x)\ln(x)^{\frac{1}{2}}$. Une primitive est donc donnée par la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{2}{3}\ln(x)^{3/2}$. Pour qu'elle s'annule en e, il suffit de retrancher $\frac{2}{3}\ln(e)^{3/2} = \frac{2}{3}$.

   On prendra donc comme primitive : $\boxed{x \mapsto \frac{2}{3}\left(\ln(x)^{3/2} - 1\right).}$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^2 (2-t)e^{-t}\,dt$.

Solution. Les fonctions $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto (2-t)$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivées respectives $u' : t \mapsto e^{-t}$ et $v' : t \mapsto -1$. La formule d'intégration par parties donne donc :

$$\int_0^2 (2-t)e^{-t}\,dt = \left[(2-t)(-e^{-t})\right]_0^2 - \int_0^2 (-1)(-e^{-t})dt.$$

Or

$$\left[(2-t)e^{-t}\right]_0^2 = (2-2)e^{-2} - (0-2)e^{-0} = 2,$$

et

$$\int_0^2 (-1)(-e^{-t})dt = \int_0^2 e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^2 = -e^{-2} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-2}.$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^2 (2-t)e^{-t}dt = 2 - (1 - e^{-2}) = \boxed{1 + e^{-2}.}$

4. (a) Trouver des réels a et b tels que $\dfrac{2}{u^2-1} = \dfrac{a}{u-1} + \dfrac{b}{u+1}$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Solution. Il suffit de prendre $a = 1$ et $b = -1$.

(b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{2x+1}$.

Solution. Pour tout réel u positif, on a $u = \sqrt{2x+1} \iff x = \frac{1}{2}(u^2-1)$. On considère donc la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{2}(u^2-1)$ qui vérifie $\frac{3}{2} = \varphi(2)$ et $4 = \varphi(3)$. Elle est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(u) = u$ pour tout $u \in [2, 3]$. De plus, $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}$ est continue sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, 4] = \varphi([2, 3])$, donc la formule de changement de variable donne :

$$\int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = \int_2^3 \frac{1}{\frac{1}{2}(u^2-1)u}\varphi'(u)\,du = \int_2^3 \frac{2}{u^2-1}\,du.$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = \int_2^3 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du &= [\ln(|u-1|) - \ln(|u+1|)]_2^3 \\ &= \ln(2) - \ln(4) - (\ln(1) - \ln(3)) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right).}\end{aligned}$$

5. Déterminer la limite de la somme de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n} - \ln(n)}}{e^{\frac{k}{n}} + 1}$ pour $n \to \infty$.

Solution. En notant f la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ continue sur $[0, 1]$, on fait apparaître une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n} - \ln(n)}}{e^{\frac{k}{n}} + 1} = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)dx.$$

Or l'intégrale se calcule par primitivation à vue :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = [\ln(|e^x+1|)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2)$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n} - \ln(n)}}{e^{\frac{k}{n}} + 1} = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).}$

Problème (durée conseillée : 1h20)

On considère les fonctions f et F définies pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = e^{-t^2/2}, \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Préliminaires

6. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de classe C^∞.

Solution. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions usuelles C^∞. Elle est en particulier continue, donc F est bien définie et dérivable. Il s'agit de l'unique primitive de f qui s'annule en 0. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. En particulier, F' est de classe C^∞, donc F l'est aussi.

7. (a) Soit $x \geqslant 1$. Montrer que : $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \leqslant \int_1^x t\,e^{-t^2/2}\,dt$.

Solution. Soit $t \in [1, x]$. On a $1 \leqslant t$, et donc $f(t) \leqslant t\,f(t)$ car $f(t) = e^{-t^2/2} \geqslant 0$. Puisque $1 \leqslant x$, on en déduit le résultat par propriété de croissance de l'intégration.

(b) En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ F(x) \leqslant F(1) + e^{-1/2}$.

Solution. Soit $x \geqslant 1$. D'après la relation de Chasles et la question précédente :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt \leqslant F(1) + \int_1^x t\,e^{-t^2/2}\,dt.$$

Or, par primitivation directe, on obtient :

$$\int_1^x t\,e^{-t^2/2} dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_1^x = -e^{-x^2/2} + e^{-1/2}.$$

Puisque $e^{-x^2/2} \geqslant 0$, le résultat s'ensuit.

(c) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Justifier qu'il existe un réel $L > 0$ tel que F admet L pour limite en $+\infty$.

Solution. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F' = f$ qui est partout strictement positive donc F est strictement croissante. On déduit alors de la question précédente que F est majorée sur $\mathbb{R}$, et qu'elle admet donc une limite L réelle en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Puisque $F(0) = 0$, la stricte croissance montre par ailleurs que $L > 0$.

(d) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = -t$, que la fonction F est impaire.
En déduire qu'elle admet une limite en $-\infty$, et préciser sa valeur.

Solution. Soit x un réel. Il s'agit de vérifier que $F(-x) = -F(x)$.
Notons φ la fonction $u \mapsto -u$, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(u) = -1$ pour tout u réel. Puisque $-x = \varphi(x)$, $0 = \varphi(0)$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, la formule de changement de variable donne :

$$\begin{aligned} F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt \\ &= \int_0^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = -\int_0^x e^{-(-u)^2/2}\,du = -F(x). \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$. Or d'après la question précédente, F admet L pour limite en $+\infty$ donc, par composition des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} F(-x) = L$. Par imparité, on en déduit que

$F(x) = -F(-x)$ admet pour limite : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = -L.}$

8. On considère la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} + \frac{F(x)}{2L}.$$

(a) Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$.

Solution. On a vu que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour G puisque $L > 0$. On en déduit, d'après le théorème de la bijection, que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle-image $G(\mathbb{R})$. Par opérations sur les limites, on obtient de plus :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{1}{2} + \frac{L}{2L} = 1, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} G(x) = \frac{1}{2} - \frac{L}{2L} = 0,$$

donc, par stricte croissance, l'intervalle-image $G(\mathbb{R})$ est bien $]0,1[$.

(b) Montrer que la bijection réciproque $G^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0,1[$, avec :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad (G^{-1})'(y) = \frac{2L}{f(G^{-1}(y))}.$$

Solution. La fonction G est bijective et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{2L} = \frac{f(x)}{2L} \neq 0.$$

Le théorème de dérivation des bijections réciproques montre donc que G^{-1} est dérivable sur $]0,1[$, avec pour tout $y \in]0,1[$: $(G^{-1})'(y) = \dfrac{1}{G'(G^{-1}(y))} = \dfrac{2L}{f(G^{-1}(y))}$.

Inégalité isopérimétrique de Bobkov

Soient maintenant $H :]0,1[\to \mathbb{R}$ et $K :]0,1[\to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad H(y) = \frac{f(G^{-1}(y))}{2L} \quad \text{et} \quad K(y) = (G^{-1}(y))^2.$$

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$ et soit $c = \dfrac{a+b}{2}$.

9. Montrer que H est de classe C^2 et que : $\forall y \in]0,1[\,,\ H''(y) = -\dfrac{1}{H(y)}$.

Solution. La fonction H est dérivable par composition des fonctions dérivables f et G^{-1} et, puisque $f'(x) = -x\,f(x)$ pour tout x réel, on obtient pour tout $y \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} H'(y) &= \frac{1}{2L} \times f'(G^{-1}(y)) \times (G^{-1})'(y) \\ &= -\frac{1}{2L} \times G^{-1}(y)\, f(G^{-1}(y)) \times \frac{2L}{f(G^{-1}(y))} \\ &= -G^{-1}(y). \end{aligned}$$

On déduit alors de la question précédente b) que H est deux fois dérivable, avec :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad H''(y) = -(G^{-1})'(y) = -\frac{2L}{f(G^{-1}(y))} = -\frac{1}{H(y)}.$$

Puisque H est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$, on en déduit que H'' est C^2.

10. En remarquant que $K = (H')^2$, en déduire que K est convexe sur $]0,1[$.

Solution. Puisque $K = (H')^2$ et que H' est C^1, on sait que fonction K est C^1, avec :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad K'(y) = 2H'(y)H''(y) = -\frac{2H'(y)}{H(y)}.$$

Or H ne s'annule pas et H et H' sont C^1, donc K' est au moins C^1 et :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad K''(y) = \frac{-2[H''(y)H(y) - H'(y)H'(y)]}{H(y)^2} = \frac{2[1 + H'(y)^2]}{H(y)^2} \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction K est C^2 sur $]0,1[$ et K'' est positive, donc K est convexe.

On considère $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall y \in]0,1[\,,\ h(y) = H(y)^2 + (y-c)^2 - H(c)^2$.

11. (a) En utilisant les questions 9 et 10, montrer que :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad h''(y) \geqslant 2K(c) + 2(y-c)K'(c).$$

Solution. La fonction h est C^2 par opérations algébriques, et pour tout $y \in]0,1[$,

$$h'(y) = 2H(y)H'(y) + 2(y-c) + 0, \qquad h''(y) = 2H'(y)^2 + 2H(y)H''(y) + 2.$$

Or $H(y)H''(y) = -1$ et $H'(y)^2 = K(y)$, donc on a bien $h'' = 2K$. Par convexité, la courbe de K est toujours au-dessus de sa tangente en c, donc :

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad h''(y) = 2K(y) \geqslant 2[K(c) + (y-c)K'(c)].$$

(b) En déduire que : $h(a) + h(b) \geqslant \dfrac{(a-b)^2}{2} K(c)$.

Solution. La fonction $u : y \mapsto h(y) - (y-c)^2K(c) - \frac{1}{3}(y-c)^3K'(c)$ est C^2 sur $]0,1[$ et vérifie $u'' \geqslant 0$ d'après l'inégalité précédente, donc elle est convexe sur $]0,1[$. On en déduit que pour tout $y \in]0,1[\,,\ u(y) \geqslant u(c) + (y-c)u'(c)$, c'est-à-dire :

$$h(y) \geqslant u(c) + (y-c)u'(c) + (y-c)^2K(c) + \frac{(y-c)^3}{2}K'(c).$$

On somme maintenant les inégalités obtenues pour $y = a$ et $y = b$, en remarquant que $a - c = -(b-c) = \frac{a-b}{2}$. Les termes d'ordre impair se simplifient et on obtient :

$$h(a) + h(b) \geqslant 2\,u(c) + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 K(c).$$

Le résultat demandé en découle directement car $u(c) = h(c) = H(c)^2 - H(c)^2 = 0$.

12. On admet l'inégalité suivante : $|h(a) - h(b)| \leqslant 2H(c)|H'(c)|\,|a-b|$.

(a) Déduire de ce qui précède que $(h(a) - h(b))^2 \leqslant 8\,H(c)^2\,(h(a) + h(b))$.

Solution. D'après le résultat admis et la question 11, on a facilement :

$$\begin{aligned}(h(a) - h(b))^2 &\leqslant 4H(c)^2H'(c)^2(a-b)^2 = 8H(c)^2K(c)\frac{(a-b)^2}{2} \\ &\leqslant 8H(c)^2\,(h(b) + h(a)).\end{aligned}$$

(b) Soient α et β deux réels non nuls. Déterminer les racines du polynôme

$$X^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)X + (\alpha^2 - \beta^2)^2.$$

Solution. Le discriminant de ce polynôme du second degré est

$$4(\alpha^2+\beta^2)^2 - 4(\alpha^2-\beta^2)^2 = 16\alpha^2\beta^2, \quad \text{qui est strictement positif.}$$

Il admet donc deux racines réelles :

$$\frac{2(\alpha^2+\beta^2)-4\alpha\beta}{2} = \boxed{(\alpha-\beta)^2,} \quad \text{et} \qquad \frac{2(\alpha^2+\beta^2)+4\alpha\beta}{2} = \boxed{(\alpha+\beta)^2.}$$

(c) Montrer enfin que $H\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{H(a)^2+\dfrac{(a-b)^2}{4}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{H(b)^2+\dfrac{(a-b)^2}{4}}$.

Solution. On pose :

$$\delta = \frac{a-b}{2}, \quad \alpha = \sqrt{H(a)^2+\delta^2}, \quad \beta = \sqrt{H(b)^2+\delta^2}, \quad \gamma = H(c).$$

L'inégalité que nous venons d'établir est :

$$(\alpha^2-\beta^2)^2 \leqslant 8\gamma^2(\alpha^2+\beta^2-2\gamma^2) = -16\gamma^2 + 8\gamma^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Ainsi, le réel $4\gamma^2$ se situe entre les deux racines de $X^2 - 2(\alpha^2+\beta^2)X + (\alpha^2-\beta^2)^2$.
On obtient donc finalement (rappelons que α, β et γ sont positifs) :

$$(\alpha-\beta)^2 \leqslant 4\gamma^2 \leqslant (\alpha+\beta)^2, \qquad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}.}$$

Il s'agit bien de l'inégalité désirée.