Devoir surveillé n° 6

E1A 2016–2017

Paris, le samedi 4 mars

Exercice 1 : pot-pourri

1. Donner un exemple de matrice diagonale dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, non inversible. (justification attendue)

Solution : On sait qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si *tous* ses coefficients sur la diagonale sont différents de 0. On peut donc prendre comme exemple la matrice nulle, ou encore :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 5 \end{array} \right.$$

Solution : Utilisons la ligne 4 pour éliminer la variable x dans les autres lignes à l'aides des opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & & & - & 21z & - & 7t & = & -18 \\ & & & - & 3z & - & t & = & -4 \\ & & & - & 7z & - & 3t & = & -7 \\ \color{blue}{x} & - & 2y & + & 4z & & & = & 5 \end{array} \right.$$

Puis on élimine la variable t dans les lignes 1 et 3 à l'aide la ligne 2 : $L_1 \leftarrow L_1 - 7L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & & & 0 & = & 10 \\ & & & - & 3z & \color{blue}{-} & \color{blue}{t} & = & -4 \\ & & & & 2z & & & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 5 \end{array} \right.$$

À ce stade, on a fait apparaître la condition de compatibilité $\color{red}{0 = 10}$ qui n'est jamais satisfaite. Le système n'a donc aucune solution. Autrement dit :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \emptyset.}$$

3. On considère la fonction φ définie, pour tout $x \in [0,1]$ par : $\varphi(x) = x\ e^{-x}$.
Montrer que l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}$ admet une unique solution dans $[0,1]$.

Solution : **Ici, on pense immédiatement au théorème de la bijection !**

- La fonction φ est le produit de deux fonctions usuelles continues (et même dérivables) sur l'intervalle $[0,1]$, donc elle est **continue** (et même dérivable) sur l'**intervalle** $[0,1]$.
- La dérivée de φ est la fonction $x \mapsto e^{-x}(1-x)$ qui est strictement positive sur l'intervalle $[0,1[$. Ainsi, φ est **strictement croissante** sur $[0,1]$.
- Aux bornes, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = e^{-1}$. Or $e > 3$, donc $\varphi(0) \leq \frac{1}{3} \leq \varphi(1)$.

D'après le **théorème de la bijection**,

$$\boxed{\text{il existe donc un unique } x \in [0,1] \text{ tel que } \varphi(x) = \tfrac{1}{3}.}$$

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$.

Solution : On effectue deux calculs préliminaires :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

puis le produit matriciel :

$$(M - I_3)(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Exprimer M^2 en fonction de M et de I_3.

Solution : On obtient alors, en développant le produit, $M^2 - M + 3M - 3I = 0$, i.e. $\boxed{M^2 = 3I - 2M.}$

(c) En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1}.

Solution : On a $M^2 + 2M = 3I$, donc $\frac{1}{3}M(M + 2I_3) = I_3$, donc M est inversible d'inverse

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

5. En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

— avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

— avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

(a) Quel est le taux global de personnes soulagées ?

Solution : Notons S l'évènement « la personne est soulagée », A l'évènement « la personne prend de l'aspirine » et M « la personne prend le médicament M ». L'évènement A et l'évènement M sont des évènements contraires. Ainsi (A, M) est un **système complet d'événements**. On peut appliquer la **formule des probabilité totales** :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S) + \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(S) = \frac{3}{5} \times \frac{75}{100} + \frac{2}{5} \times \frac{90}{100} = \boxed{\frac{81}{100}}$$

(b) Un patient pris au hasard est soulagé. Quelle est la probabilité pour qu'il ait pris de l'aspirine ?

Solution : Il s'agit de calculer $\mathbb{P}_S(A)$. On applique ici la **formule de Bayes** et on obtient :

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{75}{100}}{\frac{81}{100}} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

Exercice 2 : puissances d'une matrice (d'après HEC 2012, voie E)

Soit m un réel donné strictement positif et M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6. La matrice M est-elle inversible ? (on ne demande pas de calculer son inverse)

Solution : Il s'agit de déterminer si le système homogène associé à la matrice M est de Cramer :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & m^{-1}y & + & m^{-2}z & = & 0 \\ mx & & & + & m^{-1}z & = & 0 \\ m^2x & + & my & & & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} & & m^{-1}y & + & m^{-2}z & = & 0 \\ mx & & & + & m^{-1}z & = & 0 \\ & & my & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

puis en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - m^2L_1$, on obtient le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & m^{-1}y & + & m^{-2}z & = & 0 \\ mx & & & + & m^{-1}z & = & 0 \\ & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & & & + & m^{-1}z & = & 0 \\ & & m^{-1}y & + & m^{-2}z & = & 0 \\ & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système de 3 équations à 3 inconnues possède 3 pivots, donc il est de Cramer : $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

7. (a) Trouver deux réels a et b tels que $M^2 = aI + bM$.

Solution : En calculant le produit matriciel $M^2 = M \times M$, on obtient :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2\,I + M}$$

Autrement dit, il suffit de prendre $a = 2$ et $b = 1$.

(b) Soient λ un réel et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $MX = \lambda X$, alors $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ou $X = 0$.
En déduire deux réels r_1, r_2 tels que, si $\lambda \notin \{r_1, r_2\}$, le système linéaire $(M - \lambda\, I)X = 0$ est de Cramer.

Solution : Supposons que $MX = \lambda X$. D'après la question précédente $M^2 - M - 2I = 0$, donc $0 = (M^2 - M - 2I)X = M^2X - MX - 2X$. Or $MX = \lambda X$ et $M^2X = M(\lambda X) = \lambda(MX) = \lambda^2 X$. Ainsi $0 = \lambda^2 X - \lambda X - 2X$, d'où l'égalité suivante :

$$(\lambda^2 - \lambda - 2)X = 0.$$

Si $\lambda^2 - \lambda - 2 \neq 0$, on simplifie cette relation en multipliant par l'inverse et on obtient $X = 0$.
Dans l'autre cas, on a trivialement $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Ceci montre que $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ou $X = 0$.

En cherchant des racines évidentes (ou avec le discriminant), on observe que $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$.
Les seules solutions de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ d'inconnue λ sont donc les réels $\boxed{r_1 = -1 \text{ et } r_2 = 2.}$

D'après tout ce qui précède, si $\lambda \notin \{-1, 2\}$, le sytème linéaire $(M - \lambda I)X = 0$ d'inconnue X admet pour unique solution la matrice nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: il est de Cramer.

(c) Résoudre les systèmes linéaires $(M - r_1\,I)X = 0$ et $(M - r_2\,I)X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution : Il s'agit de résoudre les deux systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & m^{-1}y & + & m^{-2}z & = & 0 \\ mx & + & y & + & m^{-1}z & = & 0 \\ m^2x & + & my & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rrcrcrcl} - & 2x & + & m^{-1}y & + & m^{-2}z & = & 0 \\ & mx & - & 2y & + & m^{-1}z & = & 0 \\ & m^2x & + & my & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

8. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ m & 0 & m \\ 0 & m^2 & m^2 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $P^{-1}M^nP$.

Solution : On démontre, par une récurrence routinière, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}M^nP = (P^{-1}MP)^n$. Or, la matrice $P^{-1}MP$ étant diagonale, ses puissances se calculent terme à terme. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}M^nP = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

(b) Recopier le code Scilab suivant en remplaçant les points de suspension de manière à définir une fonction :

— nommée `puissanceMatrice`, ayant un paramètre de sortie `R` et deux paramètres d'entrée `m` et `n`,

— telle qu'un appel à `puissanceMatrice(`m`,`n`)` renvoie la valeur de la matrice M^n.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant D la matrice diagonale obtenue à la question précédente, on peut exprimer M^n de la manière suivante : $M^n = P(P^{-1}M^nP)P^{-1} = PDP^{-1}$. D'où le code Scilab :

```
function R = puissanceMatrice(m,n)
  P = [-1, -1, 1 ; m, 0, m ; 0, m^2, m^2]
  Q = P^(-1)                                  // matrice inverse
  D = diag([(-1)^n, (-1)^n, 2^n])             // matrice diagonale
  R = P * D * Q
endfunction
```

9. On pose : $U = \dfrac{1}{3}(M + I)$ et $V = -\dfrac{1}{3}(M - 2I)$.

(a) Calculer U^2 et V^2, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, U^n et V^n.

Solution : Puisque M et I commutent, on peut écrire

$$U^2 = \frac{1}{9}(M+I)^2 = \frac{1}{9}(M^2 + 2M + I) = \frac{1}{9}(2I + M + 2M + I) = \frac{1}{9}(3M + 3I) = \frac{1}{3}(M + I) = U$$

Ainsi, $\boxed{U^2 = U}$ et on obtient de même $\boxed{V^2 = V.}$ Une récurrence immédiate conduit alors à :

$$\boxed{U^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ U & \text{si } n \geq 1 \end{cases}} \qquad \boxed{V^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ V & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$$

(b) Calculer $2U - V$, UV et VU. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de U et V.

Solution : Les matrices M et I commutent. En développant, on obtient facilement :

$$\boxed{2U - V = M}, \qquad \boxed{UV = -\frac{1}{9}(M^2 - M - 2I) = 0}, \qquad \boxed{VU = -\frac{1}{9}(M^2 - M - 2I) = 0}.$$

En particulier, les matrices U et V **commutent**.
La **formule du binôme de Newton** donne donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^n = (2U - V)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2U)^k (-V)^{n-k} = (-1)^n V^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} U^k V^{n-k} + 2^n U^n.$$

Si $1 \leq k \leq n-1$, alors $U^k V^{n-k} = U^{k-1} UV V^{n-k-1} = 0$, d'où $M^n = 2^n U + (-1)^n V$.
De plus cette formule est encore vérifiée lorsque $n = 0$ car $M^0 = I$ et $U + V = I$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = 2^n U + (-1)^n V}$$

Remarque. On pouvait ici se passer de la formule du binôme en raisonnant par récurrence.

(c) Déterminer deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $M^n = a_n I + b_n M$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$M^n = \frac{1}{3} 2^n (M + I) - (-1)^n \frac{1}{3}(M - 2I) = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M$$

Il suffit donc de poser $\boxed{a_n = \frac{1}{3}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n}$ et $\boxed{b_n = \frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n}$.

(d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Solution : Commençons par remarquer que $M^{-1} = \frac{1}{2}U - V$ puisque

$$(2U - V)(\tfrac{1}{2}U - V) = U^2 + V^2 = U + V = I$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme conduit alors, comme aux questions b et c ci-dessus, à :

$$M^{-n} = (M^{-1})^n = \frac{1}{2^n} U + (-1)^n V = 2^{-n} U + (-1)^{-n} V = a_{-n} I + b_{-n} M.$$

$$\boxed{\text{La formule précédente est donc valable pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Remarque. Une autre possibilité plus calculatoire pour cette question consiste à vérifier directement que $a_{-n}I + b_{-n}M$ est l'inverse de la matrice $M^n = a_n I + b_n M$ en simplifiant le produit :

$$(a_n I + b_n M)(a_{-n} I + b_{-n} M) = \ldots = I$$

Problème 1 : matrices et probabilités

Une urne contient une boule jaune, une verte et une rouge. On effectue des tirages successifs avec remise dans l'urne, et on s'intéresse au nombre de couleurs différentes obtenues à l'issue de ces tirages.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

— A_n l'événement « Après n tirages, une seule couleur a été tirée »,

— B_n l'événement « Après n tirages, seules deux couleurs distinctes ont été tirées »,

— C_n l'événement « Après n tirages, les trois couleurs ont été tirées ».

On note également a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.

10. (a) Déterminer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.

Solution :

- À l'issue du premier tirage, une seule boule a été tirée. Une seule couleur a donc été tirée.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 = 0.}$$

- La première boule ayant été tirée puis remise dans l'urne, la boule tirée au second tirage est :
  — soit celle qui a été tirée au premier tirage (1 boule sur les trois satisfait cette condition),
  — soit l'une des deux autres.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } a_2 = \frac{1}{3},\ b_2 = \frac{2}{3},\ c_2 = 0.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les probabilités conditionnelles :

$$\begin{array}{lll} P_{A_n}(A_{n+1}), & P_{A_n}(B_{n+1}), & P_{A_n}(C_{n+1}), \\ P_{B_n}(A_{n+1}), & P_{B_n}(B_{n+1}), & P_{B_n}(C_{n+1}), \\ P_{C_n}(A_{n+1}), & P_{C_n}(B_{n+1}), & P_{C_n}(C_{n+1}). \end{array}$$

Solution :

- Si à l'issue du n-ième tirage, une seule couleur a été tirée, la boule tirée au $(n+1)$-ième tirage est :
  — soit celle qui a été tirée aux n tirages précédents (1 boule sur trois satisfait cette condition),
  — soit l'une des deux autres.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3},\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0.}$$

- Si à l'issue du n-ième tirage, deux couleurs distinctes ont été tirées, la boule tirée au $(n+1)$-ième tirage est :
  — soit l'une des deux boules qui a été tirée lors des n tirages précédents (2 boules sur les trois satisfont cette condition),
  — soit la boule qui n'a pas été tirée précédemment.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0,\ \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3},\ \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}.}$$

- Si à l'issue du n-ième tirage, les trois couleurs ont été tirées, les trois couleurs auront aussi été tirées à l'issue du $(n+1)$-ième tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 0,\ \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = 0,\ \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1.}$$

(c) En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Solution : La famille (A_n, B_n, C_n) est un **système complet d'événements**.
Par la **formule des probabilités totales**, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{P}(A_{n+1}) & = & \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) & + & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) & + & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) \\ & = & \frac{1}{3}\, a_n & & & & \end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{P}(B_{n+1}) & = & \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) & + & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) & + & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) \\ & = & \frac{2}{3}\, a_n & + & \frac{2}{3}\, b_n & & \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) & = & \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) & + & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) & + & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) \\ & = & & & \frac{1}{3}\, b_n & + & c_n \end{array}$$

Autrement dit, on a : $\left\{ \begin{array}{rcccccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}\, a_n & & & & \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}\, a_n & + & \frac{2}{3}\, b_n & & \\ c_{n+1} & = & & & \frac{1}{3}\, b_n & + & c_n \end{array} \right.$ $\boxed{\text{D'où la matrice } M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.}$

(d) Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Solution : Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$ où $\mathcal{P}_n$: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

— **Initialisation :** $M^{1-1} = M^0 = I_3$. On a bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (*i.e.* $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$).

D'après la question c, on sait que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Or par hypothèse de récurrence, on a : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

— **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.}$

11. On considère dans cette question la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2.

Solution : $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.}$

(b) Justifier que pour tout n entier naturel, il existe trois réels u_n, v_n et t_n tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix}.$$

Montrer de plus que les trois suites (u_n), (v_n) et (t_n) ainsi définies vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2^{n+1} \\ v_{n+1} = v_n + 2\,t_n \\ t_{n+1} = 2\,t_n + 3^n \end{cases}$$

Solution : Démontrons par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n)$ où

$$\mathcal{P}_n : \text{« il existe } u_n, v_n, t_n \text{ tels que } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix} \text{ ».}$$

— **Initialisation** : $A_0 = I_3$. De plus, $2^0 = 1$ et $3^0 = 1$.
Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vérifiée en prenant $u_0 = v_0 = t_0 = 0$.

— **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$

(*i.e.* il existe u_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1} tels que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_{n+1} & t_{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}$)

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n + 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_n + 2\,t_n & 2\,t_n + 3^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée en prenant $u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}$, $v_{n+1} = v_n + 2\,t_n$ et $t_{n+1} = 2\,t_n + 3^n$.

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n), (v_n) \text{ et } (t_n) \text{ sont définies par : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2^{n+1} \\ v_{n+1} = v_n + 2\,t_n \\ t_{n+1} = 2\,t_n + 3^n \end{cases}}$$

Remarque. Si on calculait $A^{n+1} = A \times A^n$, on tombait sur d'autres relations de récurrence ! Plus précisément : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2\,u_n + 2 \\ v_{n+1} = 3\,v_n + u_n \\ t_{n+1} = 3\,t_n + 2^n \end{cases}$

(c) En calculant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)$, prouver que $u_n = 2^{n+1} - 2$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $u_{i+1} = u_i + 2^{i+1}$. Ainsi : $u_{i+1} - u_i = 2^{i+1}$.
En sommant les égalités précédentes, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i+1}$$

- $\sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) = u_n - u_1$ par sommation télescopique.

- $\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-2} 2^{i+2} = 2^2 \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 4\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2} = 4\left(2^{n-1}-1\right) = 2^{n+1}-4$

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_n = 2^{n+1} - 4 + u_1 = 2^{n+1} - 2.}$$

(d) En se servant de même de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i}\right)$, déterminer la valeur de t_n.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $t_{i+1} = 2t_i + 3^i$.

Ainsi : $\dfrac{t_{i+1}}{2^{i+1}} = 2\dfrac{t_i}{2^{i+1}} + \dfrac{3^i}{2^{i+1}}$, ce qui s'écrit : $\dfrac{t_{i+1}}{2^{i+1}} = \dfrac{t_i}{2^i} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^i$ ou encore : $\dfrac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \dfrac{t_i}{2^i} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^i$.
En sommant les égalités précédentes, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i$$

- $\sum_{i=1}^{n-1}\left(\dfrac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \dfrac{t_i}{2^i}\right) = \dfrac{t_n}{2^n} - \dfrac{t_1}{2^1}$ par sommation télescopique.
- $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{3}{4}\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right)$.

Ainsi : $\dfrac{t_n}{2^n} = \dfrac{t_1}{2} - \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1$. $\boxed{\text{Ainsi : } t_n = 3^n - 2^n.}$

On admet qu'on pourrait obtenir de façon analogue $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

12. (a) En remarquant que $M = \dfrac{1}{3}A$, donner la valeur de M^{n-1}, puis celles de a_n, b_n et c_n.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Comme } M = \frac{1}{3}A, \text{ on a } M^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} A^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} A^{n-1}.}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3^{n-1}} A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3^{n-1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ v_{n-1} & t_{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Autrement dit : $\left\{\begin{array}{lllllll} a_n & = & \dfrac{1}{3^{n-1}} & & & & \\ b_n & = & \dfrac{u_{n-1}}{3^{n-1}} & = & \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} & = & 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{3^{n-1}} \\ c_n & = & \dfrac{v_{n-1}}{3^{n-1}} & = & \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} & = & 1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3^{n-1}} \end{array}\right.$

(b) Déterminer les limites de ces trois suites. Les résultats obtenus sont-ils étonnants ?

Solution : Remarquons tout d'abord que :

- $3^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{3^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
- $0 \leq \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ et } c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.}$$

Presque sûrement, chaque couleur sera tirée si on attend assez longtemps : ce n'est pas étonnant.

Problème 2 : étude de fonctions

Pour tout entier n positif, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = e^x + n\,x^2 - 3$$

13. (a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition. Dresser son tableau de variations.

Solution : La fonction f_n est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = e^x + 2nx > 0$$

x	0	$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	$+$	
Variations de f_n	-2 ↗	$+\infty$

(b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

Solution : La tangente de f_n en 1 a pour équation $y = f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1)$.
Or : $f_n(1) = e^1 + n - 3$ et $f_n'(1) = e^1 + 2n$. Ainsi :

$$f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1) = e^1 + n - 3 + (e^1+2n)\,(x-1) = -n - 3 + (e^1+2n)\,x$$

$$\boxed{\text{La tangente de } f_n \text{ en 1 a pour équation } y = -(n+3) + (e^1+2n)\,x.}$$

(c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

Solution : La fonction f_n est :

— continue sur $[0,+\infty[$,

— strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [-2,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } 0 \in [-2,+\infty[\text{ admet un unique antécédent } u_n \in [0,+\infty[\text{ par la fonction } f_n.}$$

(d) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geq 1$.

Solution : La fonction $f_0 : x \mapsto e^x - 3$ s'annule en $\boxed{u_0 = \ln 3}$.

(e) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in\,]0,1[$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— $f_n(u_n) = 0$ par définition,

— $f_n(0) = -2 < 0$,

— $f_n(1) = e^1 + n - 3 > 0$ car $n \geq 1$ et $e^1 > 2,71$.

Ainsi : $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$. On applique alors la fonction f_n^{-1}, strictement croissante (car de même monotonie que f_n) à chaque membre de cette inégalité.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } 0 < u_n < 1.}$$

14. Copier le programme Scilab suivant en remplaçant les points de suspension de sorte que :
    — le programme demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n au clavier,
    — puis calcule une valeur approchée de u_n à 0,001 près par la méthode de dichotomie,
    — et enfin affiche la valeur approchée obtenue.

Solution : On utilise la croissance des fonctions f_n.

```
eps = 0.001
n = input("Veuillez entrer l''entier n :")
g = 0
d = 1
while d - g > eps
  x = (d+g)/2
  if (exp(x) + n * x^2 - 3 < 0)  then
    g = x
  else
    d = x
  end
end
disp("Approximation de u_n : " + string(g))
```

15. (a) Montrer que : $\forall x \in \,]0,1[\,,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

Solution : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \;=\; (e^x + (n+1)\,x^2 - 3) - (e^x + n\,x^2 - 3) \;=\; x^2 \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in]0,1[\text{, on a : } f_{n+1}(x) > f_n(x).}$$

(b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

Solution : Comme $u_{n+1} \in]0,1[$, on peut appliquer le résultat de la question précédente.
On obtient : $f_n(u_{n+1}) \;<\; f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_n(u_{n+1}) \;<\; 0.}$$

On peut écrire cette inégalité sous la forme : $f_n(u_{n+1}) \;<\; 0 = f_n(u_n)$. En appliquant f_n^{-1}, strictement croissante, à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $u_{n+1} < u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

(c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Solution : La suite (u_n) est décroissante et elle est minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite réelle ℓ qui vérifie $0 \leq \ell \leq 1$.

(d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$. Calculer la limite de $e^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

Solution : Supposons que $\ell > 0$. Alors :

- $e^{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\ell}$ par continuité de l'exponentielle,
- $n\,u_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ par produit de limites.

On en déduit que $f_n(u_n) = e^{u_n} + n\,u_n^2 - 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ par somme de limites.

$$\boxed{\text{Or, par définition de } u_n\text{, on a : } f_n(u_n) = 0\text{, ce qui contredit le calcul précédent.}}$$

(e) Donner enfin la valeur de ℓ.

Solution : D'après la question précédente, $\ell \leq 0$. Comme de plus $0 \leq \ell \leq 1$, on a : $\boxed{\ell = 0}$.

(f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\, u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Solution : On a : $f_n(u_n) = 0 = e^{u_n} + n\, u_n^2 - 3$. Ainsi : $n\, u_n^2 = 3 - e^{u_n}$.
D'où : $\dfrac{n}{2}\, u_n^2 = \dfrac{3 - e^{u_n}}{2}$ et $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\, \sqrt{u_n^2} = \sqrt{\dfrac{3 - e^{u_n}}{2}}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sqrt{\frac{n}{2}}\, u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt{\frac{3 - e^0}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1}$$

(g) En déduire un équivalent de la suite (u_n), quand n tend vers $+\infty$.

Solution : Le résultat précédent se traduit directement par : $\boxed{u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}}$.