Devoir surveillé n^{o} 5

E1A 2016-2017

28 janvier

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : ***l'usage de la calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.*** *Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

I. Probabilités conditionnelles

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. Lors du contrôle, 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. On prend une pièce au hasard et on la soumet au contrôle.

1. Introduire deux évènements adéquats, puis traduire les données à l'aide de probabilités conditionnelles pour ces évènements ou leurs complémentaires.

> **Solution :** Introduisons les évènements D : « la pièce est défectueuse » et R : « la pièce est refusée ». Les évènements « la pièce est correcte » et « la pièce est acceptée » correspondent alors respectivement à $\overline{D}$ et $\overline{R}$. Les données se traduisent donc par :
>
> $$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{3}{100}}, \quad \boxed{\mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{99}{100}}, \quad \boxed{\mathbb{P}_D(R) = \frac{98}{100}}.$$

2. Calculer la probabilité pour que :

   (a) La pièce testée soit refusée à tort.

> **Solution :** La pièce est refusée à tort lorsqu'elle elle est refusée *et* n'est pas défectueuse. Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(R\cap\overline{D})$. D'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(R\cap\overline{D}) = \mathbb{P}_{\overline{D}}(R)\mathbb{P}(\overline{D})$. Or $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_{\overline{D}}$ sont des applications de probabilité, donc la formule du complémentaire donne
>
> $$\mathbb{P}_{\overline{D}}(R) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{R}) = \frac{1}{100}, \qquad \mathbb{P}(\overline{D}) = 1 - \mathbb{P}(D) = \frac{97}{100}.$$
>
> On obtient finalement
>
> $$\boxed{\mathbb{P}(R\cap\overline{D}) = \frac{1}{100}\frac{97}{100} = \frac{97}{10000}}$$

   (b) La pièce testée soit acceptée.

> **Solution :** Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(\overline{R})$. Puisque $(D, \overline{D})$ forme un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales montre que
>
> $$\mathbb{P}(\overline{R}) = \mathbb{P}_D(\overline{R})\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}_{\overline{D}}(\overline{R})\mathbb{P}(\overline{D}).$$
>
> Or la formule du complémentaire montre que :
>
> $$\mathbb{P}_D(\overline{R}) = 1 - \mathbb{P}_D(R) = 1 - \frac{98}{100} = \frac{2}{100}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathbb{P}(\overline{R}) = \frac{2}{100}\frac{3}{100} + \frac{99}{100}\frac{97}{100} = \frac{9609}{10000}}$$

(c) Le contrôle commette une erreur.

Solution : Une erreur correspond à accepter une pièce défectueuse ou refuser une pièce correcte. Il s'agit donc de calculer la probabilité de l'évènement $(D \cap \overline{R}) \cup (\overline{D} \cap R)$. Les évènements $D \cap \overline{R}$ et $\overline{D} \cap R$ sont incompatibles, donc par propriété d'additivité :

$$\mathbb{P}((D \cap \overline{R}) \cup (\overline{D} \cap R)) = \mathbb{P}(D \cap \overline{R}) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap R)$$

Or d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(D \cap \overline{R}) = \mathbb{P}_D(\overline{R})\mathbb{P}(D) = \frac{2}{100}\frac{3}{100} = \frac{6}{10000}, \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(\overline{D} \cap R) = \frac{97}{10000} \quad \text{(d'après 2.a).}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}((D \cap \overline{R}) \cup (\overline{D} \cap R)) = \frac{103}{10000}}$$

(d) Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

Solution : Il s'agit enfin de calculer $\mathbb{P}_{\overline{R}}(D)$, ce qu'on peut faire en utilisant la formule de Bayes, ou en repartant directement de la définition et des calculs précédents :

$$\mathbb{P}_{\overline{R}}(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap \overline{R})}{\mathbb{P}(\overline{R})} = \frac{\mathbb{P}_D(\overline{R})\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(\overline{R})} = \frac{\frac{2}{100}\frac{3}{100}}{\frac{9609}{10000}} = \frac{6}{9609} = \boxed{\frac{2}{3203}}$$

II. Calcul de limites

Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes :

3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}}$ en 0 et en $+\infty$.

Solution : Commençons par 0. On a $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x - 1) = -1$, donc

$$\ln(x) + x - 1 \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty \quad \text{(par somme).}$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$, donc $\lim_{x \to 0} e^{-x} = e^0 = 1$ par continuité de exp et composition. Ainsi,

$$x + e^{-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \text{ (par somme), puis enfin : } \quad \boxed{\frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}} \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty} \quad \text{(par quotient).}$$

En $+\infty$, on observe une forme indéterminée... qu'on contourne bien vite en factorisant par le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}} = \frac{x\left(\frac{\ln(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)} = \frac{\frac{\ln(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{e^{-x}}{x}}.$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées. De plus $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ par composition (sachant que $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$). On en déduit que

$$\boxed{\frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1} \qquad \text{(par opérations sur les limites).}$$

4. $x \mapsto \exp(x - e^x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution : Afin de traiter la composition, commençons par étudier $x \mapsto x - e^x$: il y a une forme indéterminée en $+\infty$ qu'on contourne bien vite en factorisant par le terme dominant :

$$x - e^x = e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty \quad \text{car} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissances comparées).}$$

Or $\lim_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$, donc par composition : $\boxed{\exp(x - e^x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$.

En $-\infty$, l'approche naïve ne pose pas de problème : on sait que $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \to -\infty} (x - e^x) = -\infty$ par opérations sur les limites (ici une différence). On est donc dans le même cas que précédemment : à nouveau, le théorème de composition fournit la conclusion $\boxed{\exp(x - e^x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0}$.

5. $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}$ en 2 et en $+\infty$.

Solution : Par composition de fonctions continues, la fonction $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+1)}$ est continue en 2. On a donc $\lim_{x \to 2} \sqrt{\ln(x^2+1)} = \sqrt{\ln(2^2+1)} = \sqrt{\ln(5)}$. On obtient de même $\lim_{x \to 2} \sqrt{\ln(x^2-1)} = \sqrt{\ln(3)}$, puis une première conclusion par opérations sur les limites :

$$\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} \xrightarrow[x \to 2]{} \sqrt{\ln(5)} - \sqrt{\ln(3)}.$$

L'approche naïve ne fonctionne pas ici en $+\infty$ car elle se heurte à une forme indéterminée. On utilise alors la méthode de la quantité conjuguée pour faire apparaitre des simplifications :

$$\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} = \frac{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)}{\sqrt{\ln(x^2+1)} + \sqrt{\ln(x^2-1)}} = \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\sqrt{\ln(x^2+1)} + \sqrt{\ln(x^2-1)}}$$

On obtient alors $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, donc $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(1) = 0$ par composition, car la fonction ln est continue en 1.

On pourrait ensuite déterminer la limite du dénominateur $\sqrt{\ln(x^2+1)} + \sqrt{\ln(x^2-1)}$ par compositions et opérations. Mais ce n'est pas nécessaire ici : il suffit d'appliquer le théorème d'encadrement après avoir remarqué que pour tout $x \geqslant 2$,

$$\left| \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\sqrt{\ln(x^2+1)} + \sqrt{\ln(x^2-1)}} \right| \leqslant \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\sqrt{\ln(5)} + \sqrt{\ln(3)}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

La conclusion est donc : $\boxed{\sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

6. $x \mapsto x \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ en 0 et en $+\infty$.

Solution : Remarquons déjà que $\dfrac{x}{x-1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, d'où $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$ par composition. Cette méthode naïve conduit à une indétermination car $x \to 0$, mais elle suggère l'utilisation du résultat de croissances comparées $\lim_{y \to 0} y \ln(y) = 0$, qui par composition avec $y = \dfrac{x}{x-1}$ montre que

$$\frac{x}{x-1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0, \quad \text{d'où :} \quad \boxed{x \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = (x-1)\frac{x}{x-1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0} \quad \text{(par produit).}$$

Une autre forme indéterminée apparait en $+\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Ceci suggère l'utilisation de la limite classique $\lim_{y \to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ en choisissant y tel que $1 + y = \dfrac{x}{x-1}$, c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{x-1}$. On a bien $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, donc par composition :

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1, \quad \text{puis} \quad \boxed{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1}\,\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$$

III. Mathématiques financières

Soit a un réel tel que $0 < a < \dfrac{1}{2}$.

Le richissime Balthazar P. engage le génial inventeur Géo T. pour étudier les fluctuations du titre P. à la bourse de Donaldville. Chaque jour, le titre peut *monter*, *rester stable* ou *baisser*. Le célèbre savant observe le comportement suivant : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

— si le titre monte le jour n, alors il continuera à monter le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, il restera stable avec probabilité a, et il baissera avec probabilité a ;

— si le titre reste stable le jour n, alors il montera le jour $n+1$ avec probabilité a, restera stable avec probabilité $1-2a$, et baissera avec probabilité a ;

— si le titre baisse le jour n, alors il montera le jour $n+1$ avec probabilité a, il restera stable avec probabilité a, et il baissera avec probabilité $1-2a$.

Le premier jour de l'investissement, le titre reste stable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les évènements M_n : « le titre monte le jour n », S_n : « le titre reste stable le jour n » et B_n : « le titre baisse le jour n ». On note p_n, q_n et r_n leurs probabilités respectives.

7. Exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements (M_n, S_n, B_n) forment un système complet. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{n+1}) &= \mathbb{P}(M_{n+1}\cap M_n) + \mathbb{P}(M_{n+1}\cap S_n) + \mathbb{P}(M_{n+1}\cap B_n)\\ &= \mathbb{P}_{M_n}(M_{n+1})\mathbb{P}(M_n) + \mathbb{P}_{S_n}(M_{n+1})\mathbb{P}(S_n) + \mathbb{P}_{B_n}(M_{n+1})\mathbb{P}(B_n)\end{aligned}$$

Le probabilités conditionnelles sont données par l'énoncé. On obtient : $\boxed{p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n}$.

En raisonnant de même pour l'évènement S_{n+1}, on trouve $\boxed{q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n}$.

8. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire une expression de r_n en fonction de p_n et q_n.

Solution : À nouveau, (M_n, S_n, B_n) forme un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales : $p_n + q_n + r_n = \mathbb{P}(M_n) + \mathbb{P}(S_n) + \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
On en déduit que $\boxed{r_n = 1 - p_n - q_n}$.

9. Montrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmético-géométriques.

Solution : En reprenant les résultats précédents, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + a(1-p_n-q_n) = (1-3a)p_n + a, \quad \text{et de même} \quad q_{n+1} = (1-3a)q_n + a.$$

Les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc arithmético-géométriques.

10. En déduire des expressions explicites de p_n, q_n et r_n en fonction de n.

Solution : On commence par résoudre l'équation au point fixe associée à la relation de récurrence de la question précédente : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1-3a)x + a = x \Longleftrightarrow 3ax = a \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (car $a \neq 0$). Le théorème des suites arithmético-géométrique garantit alors que les suites $(p_n - \frac{1}{3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n - \frac{1}{3})_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison $1-3a$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n - \frac{1}{3} = (1-3a)^n(p_0 - \frac{1}{3}), \qquad q_n - \frac{1}{3} = (1-3a)^n(q_0 - \frac{1}{3}).$$

L'énoncé indique que le titre est stable le premier jour, donc $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ et $r_0 = 0$. On obtient donc

$$\boxed{p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n}, \qquad \boxed{q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^n}, \qquad \boxed{r_n = 1 - p_n - q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n}.$$

11. Étudier la convergence des trois suites et déterminer leurs limites éventuelles. Ce résultat vous surprend-il ?

Solution : On sait que $0 < a < \frac{1}{2}$, donc $0 > -3a > -\frac{3}{2}$, puis $1 > 1-3a > -\frac{1}{2}$. On a donc $|1-3a| < 1$, donc d'après le théorème de convergence des suites géométriques, $(1-3a)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par opérations sur le limites, on obtient donc que les trois suites sont convergentes, et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}}$$

Ce résultat n'est pas très surprenant : les règles d'évolution du système étant symétriques par rapport aux trois états, on peut s'attendre à ce que ces trois états soient équiprobables à la limite.

IV. Intermède Scilab

Le CDI d'un lycée souhaite commander plusieurs exemplaires d'un livre de mathématiques. Le commerçant vendant ce livre propose un prix dégressif :

— 32 € par livre pour toute commande de 1 à 5 livres,

— 30 € par livre pour toute commande de 6 à 30 livres,

— 25 € par livre pour toute commande de 31 à 50 livres,

— 22 € par livre pour toute commande de 51 livres ou plus.

12. Écrire une fonction Scilab :
    — dont le nom est `prixCommande`,
    — prenant un argument d'entrée nommé `nbL` représentant le nombre de livres de la commande,
    — qui calcule le prix de la commande et stocke le résultat dans la variable `prix`, argument de sortie de la fonction.

Solution :

```
// fichier prixCommande.sci

function prix = prixCommande(nbL)
  if nbL > 50 then
    prix = nbL * 22
  elseif nbL > 30 then
    prix = nbL * 25
  elseif nbL > 5 then
    prix = nbL * 30
  else
    prix = nbL * 32
  end
enfunction
```

13. Écrire un programme Scilab qui :
 — Demande à l'utilisateur d'entrer au clavier le nombre de livres commandés.
 — Détermine le prix de la commande par un appel à `prixCommande`.
 — Affiche un message « Le montant de votre commande est de X euros. », où X est remplacé par le prix calculé.

Solution :

```
// fichier programmeCommande.sce

nbL = input("Veuillez entrer le nombre de livres : ")
prix = prixCommande(nbL)
disp("Le montant de votre commande est de " + string(prix) + " euros")
```

V. Problème : suite récurrente

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

14. (a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer f'.

Solution : f est une fonction rationnelle (*i.e.* de la forme $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes). Elle est donc dérivable sur tout ensemble sur lequel son dénominateur ne s'annule pas.

$$\boxed{f \text{ est donc dérivable sur } [0, +\infty[}$$

Soit $x \in [0, +\infty[$. On a alors :

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2\,x\,(1+x)}{(x+1)^4} = \frac{x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} - 2\,x^2}{(x+1)^4} = \frac{1-x^2}{(x+1)^4} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)^4}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3}}$$

(b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution : Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 = +\infty$, on a affaire à une forme indéterminée. On factorise donc l'expression de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\ \frac{1}{1 + 2\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + \frac{1}{x^2}}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + \frac{1}{x^2} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

(c) Dresser le tableau de variations de f.

Solution :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

15. (a) Calculer u_1 et u_2.

Solution :

$$\boxed{u_1 = f(u_0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \text{ et } u_2 = f(u_1) = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4}+1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\cancel{4}\,\frac{5^2}{4^{\cancel{2}}}} = \frac{4}{25}}$$

(b) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n non nul.

Établir par récurrence, en utilisant le sens de variation de f que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Solution : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n}+1)^2} = \frac{1}{n\,(\frac{n+1}{n})^2} = \frac{1}{\cancel{n}\,\frac{(n+1)^2}{n^{\cancel{2}}}} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

- **Initialisation**

  $u_1 = \dfrac{1}{4}$. Or $0 < \dfrac{1}{4} \leqslant 1 = \dfrac{1}{1}$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

  Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. (*i.e.* $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$)

  Par hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}(n))$, on a : $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

  Or, d'après la question ***14.c)***, f est strictement croissante sur $[0, 1]$ (*notez que* $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$).

  $$\begin{array}{lccccc} \text{On en déduit que :} & f(0) & < & f(u_n) & \leqslant & f\left(\dfrac{1}{n}\right) \\ & \shortparallel & & \shortparallel & & \rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ & 0 & & u_{n+1} & & \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

  $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$.

(c) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or $\dfrac{1}{n} \to 0$ et $0 \to 0$.

D'après le théorème d'encadrement (*ou théorème des gendarmes*),
la suite (u_n) est convergente, de limite 0.

16. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 2$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite (v_n), on a :

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2u_n + \cancel{1} - \cancel{1}}{u_n} = \frac{\cancel{u_n}\,(u_n+2)}{\cancel{u_n}} = u_n + 2$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 2}$$

(b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$.

Solution : Soit $n \geqslant 1$. D'après la question ***15.c)***, on a : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

On en déduit que : $2 \leqslant 2 < u_n + 2 \leqslant 2 + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}}$$

17. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - 4$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $2(n+1) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Solution : Soit $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$. Par définition, on a : $v_k = \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k}$. On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \qquad \textit{(on reconnaît une somme télescopique)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{u_n} - 4}$$

18. (a) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Solution : Notons $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$.
La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ par théorème de composition :

- la fonction ln dérivable sur $]0,+\infty[$,
- la fonction $h : x \mapsto 1 + x$ dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $]-1,+\infty[\subset \mathbb{R}$ et $h(]-1,+\infty[) =]0,+\infty[$.

Ainsi, g est dérivable sur $]-1,+\infty[$. Soit $x > -1$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(\cancel{1}+x) - \cancel{1}}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Comme $1 + x > 0$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, g admet un minimum égal à 0 atteint en $x = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } x > -1,\ g(x) \geqslant 0 \textit{ i.e. } x \geqslant \ln(1+x).}$$

Autre démonstration. On pouvait aussi remarquer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave. Elle est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0 qui est déterminée par l'équation $y = x$.

(b) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $\ln(k-1) - \ln k \leqslant -\dfrac{1}{k}$.

Solution : Soit $k \geqslant 2$. Notons $x = -\dfrac{1}{k} > -1$. D'après l'inégalité précédente, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Or : $\ln(1+x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln k$.

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \ln(k-1) - \ln k \leqslant -\frac{1}{k}}$$

(c) Montrer alors que pour $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.

Solution : D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant 2$, on a : $\ln(k-1) - \ln k \leqslant -\dfrac{1}{k}$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$. Soit $n \geqslant 1$.

En sommant les inégalités précédentes (*tout $k \geqslant 2$ fournit une inégalité*), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} &\leqslant \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1)) \qquad \textit{(on reconnaît une somme télescopique)} \\ &= \ln n - \ln 1 = \ln n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n}$$

19. En utilisant les questions précédentes, montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\,u_n = \frac{1}{2}$.

Solution : Soit $n \geqslant 2$. D'après la question ***17***, on a : $2(n+1) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Notons $m = n-1$ ($\geqslant 1$). D'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln m = 1 + \ln(n-1)$.

On en déduit que : $2(n+1) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + 1 + \ln(n-1)$.

En multipliant par $\dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$2\,\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{1}{n\,u_n} \leqslant 2\,\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n}$$

On remarque alors que :

- $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$
- $\ln(n-1) = \ln\left(n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$
- ainsi, on a : $\dfrac{\ln(n-1)}{n} = \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n}$
- $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$ par croissances comparées
- $\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n} \to 0$ car $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to \ln 1 = 0$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$

On en déduit, d'après le théorème d'encadrement (*ou théorème des gendarmes*), la suite $\left(\dfrac{1}{n\,u_n}\right)$ est convergente, de limite 2.

$$\boxed{\text{La suite } (n\,u_n) \text{ est donc convergente, de limite } \frac{1}{2}.}$$