Devoir surveillé n° 5

E1A 2016-2017

28 janvier

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : ***l'usage de la calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.*** *Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

I. Probabilités conditionnelles

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. Lors du contrôle, 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. On prend une pièce au hasard et on la soumet au contrôle.

1. Introduire deux évènements adéquats, puis traduire les données à l'aide de probabilités conditionnelles pour ces évènements ou leurs complémentaires.
2. Calculer la probabilité pour que :
   (a) La pièce testée soit refusée à tort.
   (b) La pièce testée soit acceptée.
   (c) Le contrôle commette une erreur.
   (d) Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

II. Calcul de limites

Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes :

3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}}$ en 0 et en $+\infty$.
4. $x \mapsto \exp(x - e^x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. $x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+1)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}$ en 2 et en $+\infty$.
6. $x \mapsto x \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ en 0 et en $+\infty$.

III. Mathématiques financières

Soit a un réel tel que $0 < a < \frac{1}{2}$.

Le richissime Balthazar P. engage le génial inventeur Géo T. pour étudier les fluctuations du titre P. à la bourse de Donaldville. Chaque jour, le titre peut *monter*, *rester stable* ou *baisser*. Le célèbre savant observe le comportement suivant : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

— si le titre monte le jour n, alors il continuera à monter le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, il restera stable avec probabilité a, et il baissera avec probabilité a ;

— si le titre reste stable le jour n, alors il montera le jour $n+1$ avec probabilité a, restera stable avec probabilité $1-2a$, et baissera avec probabilité a ;

— si le titre baisse le jour n, alors il montera le jour $n+1$ avec probabilité a, il restera stable avec probabilité a, et il baissera avec probabilité $1-2a$.

Le premier jour de l'investissement, le titre reste stable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les évènements M_n : « le titre monte le jour n », S_n : « le titre reste stable le jour n » et B_n : « le titre baisse le jour n ». On note p_n, q_n et r_n leurs probabilités respectives.

7. Exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
8. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire une expression de r_n en fonction de p_n et q_n.
9. Montrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmético-géométriques.
10. En déduire des expressions explicites de p_n, q_n et r_n en fonction de n.
11. Étudier la convergence des trois suites et déterminer leurs limites éventuelles. Ce résultat vous surprend-il ?

IV. Intermède Scilab

Le CDI d'un lycée souhaite commander plusieurs exemplaires d'un livre de mathématiques. Le commerçant vendant ce livre propose un prix dégressif :

— 32 € par livre pour toute commande de 1 à 5 livres,

— 30 € par livre pour toute commande de 6 à 30 livres,

— 25 € par livre pour toute commande de 31 à 50 livres,

— 22 € par livre pour toute commande de 51 livres ou plus.

12. Écrire une fonction Scilab :
    — dont le nom est `prixCommande`,
    — prenant un argument d'entrée nommé `nbL` représentant le nombre de livres de la commande,
    — qui calcule le prix de la commande et stocke le résultat dans la variable `prix`, argument de sortie de la fonction.

13. Écrire un programme Scilab qui :
    — Demande à l'utilisateur d'entrer au clavier le nombre de livres commandés.
    — Détermine le prix de la commande par un appel à `prixCommande`.
    — Affiche un message « Le montant de votre commande est de X euros. », où X est remplacé par le prix calculé.

V. Problème : suite récurrente

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

14. (a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer f'.
    (b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
    (c) Dresser le tableau de variations de f.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

15. (a) Calculer u_1 et u_2.
    (b) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n non nul.
    Établir par récurrence, en utilisant le sens de variation de f que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$
    (c) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
16. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
    (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 2$.
    (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$.
17. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - 4$.

    En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $2(n+1) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
18. (a) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
    (b) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $\ln(k-1) - \ln k \leqslant -\dfrac{1}{k}$.
    (c) Montrer alors que pour $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.
19. En utilisant les questions précédentes, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = \frac{1}{2}$.