Mini devoir surveillé du 3 décembre

Commentaire général. Au delà des erreurs de calcul récurrentes, ce devoir a mis en évidence le fait que nombre d'entre vous manquent de sérieux dans l'apprentissage du cours. La question 6 par exemple, qui est une simple question de cours, a été annoncée sans aucune ambiguïté. Pour autant, très peu de copies y répondent de manière satisfaisante. Dans le même ordre d'idée, nous avions déjà vu et corrigé pendant les séances de travaux dirigés les questions 8.(a,b,c) mais les réponses sont très décevantes. Je vous rappelle que reprendre les exercices fait partie intégrante de votre travail de révision. Vous devez savoir les refaire parfaitement (et rapidement) !

Pons asinorum

1. (2 points) Indiquer sans justification lesquelles des affirmations suivantes sont correctes :

a. $2016 \in \mathbb{N}$ **e.** $\{2016\} \in \mathbb{N}$ **i.** $\emptyset \in \mathbb{N}$ **m.** $\{\emptyset\} \in \mathbb{N}$
b. $2016 \subset \mathbb{N}$ **f.** $\{2016\} \subset \mathbb{N}$ **j.** $\emptyset \subset \mathbb{N}$ **n.** $\{\emptyset\} \subset \mathbb{N}$
c. $2016 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **g.** $\{2016\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **k.** $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **o.** $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
d. $2016 \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **h.** $\{2016\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **l.** $\emptyset \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **p.** $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Solution : a, f, g, j, k, l, p.
Erreur courante. Éliminer **l.** sous prétexte que $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ce n'est pas contradictoire : n'oubliez pas que l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles !

Application homographique

Soient a, b, c des réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On considère la fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx-a}$.

2. (1 point) On note $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Montrer que cette fonction définit une application $f : D \to D$.

Solution : Soit $x \in D$. Alors $cx - a \neq 0$ donc la fraction est bien définie. De plus $\frac{ax+b}{cx-a} = \frac{a}{c}$ si et seulement si $acx + bc = acx - a^2$, c'est-à-dire $a^2 + bc = 0$. Ainsi, $\frac{ax+b}{cx-a} \in D$.
Erreur courante. Oublier de vérifier que $f(x) \in D$ pour tout $x \in D$.

3. (1 point) Donner une expression simplifiée de $f \circ f$. En déduire que f est une bijection et déterminer f^{-1}.

Solution : Soit $x \in D$. Alors $f(f(x)) = \dfrac{af(x)+b}{cf(x)-a} = \dfrac{a\frac{ax+b}{cx-a}+b}{c\frac{ax+b}{cx-a}-a} = \cdots = \dfrac{(a^2+bc)x}{a^2+bc} = x.$
Ainsi $f \circ f = \mathrm{id}_D$, donc l'application f est réciproque avec elle-même. On en déduit qu'elle est bijective et que $f^{-1} = f$.
Erreur courante. Écrire $f \circ f = f(f(x))$ au lieu de $(f \circ f)(x) = f(f(x))$: vous confondez une application et un nombre (d'ailleurs, la variable x doit être introduite). Il y a aussi eu beaucoup d'erreurs de calcul dans la simplification de $f(f(x))$.

4. (1 point) Déterminer les limites de $f(n)$ et de $f(\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \dfrac{an+b}{cn-a} = \dfrac{n(a+\frac{b}{n})}{n(c-\frac{a}{n})} = \dfrac{a+\frac{b}{n}}{c-\frac{a}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a}{c}$ par opérations sur les limites car $\frac{b}{n} \to 0$ et $\frac{a}{n} \to 0$ et $c \neq 0$. On procède de même pour l'autre limite en distinguant les cas.
Si $a \neq 0$: $f(\frac{1}{n}) = \dfrac{\frac{a}{n}+b}{\frac{c}{n}-a} \to -\frac{b}{a}$

Si $a = 0$ et $b = 0$: $f(\frac{1}{n}) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$: $f(\frac{1}{n}) = \frac{b}{c}n$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $\frac{b}{c}$.
Erreur courante. Écrire $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{+\infty}{+\infty} = 1$ alors qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

5. (1.5 points) *Scilab.* Écrire une fonction `calcule_f` ayant trois paramètres d'entrée `a,b` et `c` telle que l'exécution de `calcule_f`(a, b, c) demande à l'utilisateur d'entrer un nombre x et affiche la valeur de $f(x)$.

Solution :

```
function y = calcule_f(a, b, c)
  x = input("Veuillez entrer une valeur de x :")
  y = (a * x + b) / (c * x - a)
  disp(y)
endfunction
```

Erreur courante. Oublier d'utiliser `input` ou d'affecter la valeur renvoyée à la variable `x`.

Quelques propriétés des ensembles images

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

6. (1 point) *Cours.* Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, rappeler la définition de l'*ensemble image* $f(A)$.
À quelle propriété de f est équivalente la condition $f(E) = F$?

Solution : L'ensemble image $f(A)$ est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f appartenant à l'ensemble A. Autrement dit : $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$.
On a $f(E) = F$ si et seulement si f est surjective.
Erreur courante. Ne pas connaitre le cours.

7. (1 point) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de E. Montrer que $f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$.

Solution : Notons $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $B = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$. Alors $f(A)$ et B sont des parties de F. De plus $f(A) = B$ car pour tout $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ f(x) = y \iff \exists i \in [\![1, n]\!],\ f(x_i) = y \iff y \in B.$$

Erreur courante. Invoquer la propriété de distributivité de $\cap$ et $\cup$ qui est totalement hors-sujet ici.

8. Soient A et B deux parties de E.
   (a) (1 point) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   Solution : Procédons par double inclusion.

   ($\subset$) Soit $y \in f(A \cup B)$. On peut trouver $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On distingue deux cas. **1^er^ cas :** $x \in A$. Alors $y \in f(A)$, donc $y \in f(A) \cup f(B)$. **2^e^ cas :** $x \in B$. Alors $y \in f(B)$ donc $y \in f(A) \cup f(B)$. Dans tous les cas, $y \in f(A) \cup f(B)$.

   ($\supset$) Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. On distingue deux cas. **1^er^ cas :** $y \in f(A)$. Alors on peut trouver $x \in A$ tel que $f(x) = y$. En particulier $x \in A \cup B$, donc $y \in f(A \cup B)$. **2^e^ cas :** $y \in f(B)$. Alors on trouve $x \in B$ tel que $f(x) = y$, et $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$ à nouveau.

   Erreur courante. Confondre $x \in A$ et $x \in f(A)$.

   (b) (0.5 points) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Solution : Soit $y \in f(A \cap B)$. Posons $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. En particulier $x \in A$, donc $y \in f(A)$. De même $x \in B$, donc $y \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$.
Erreur courante. Confondre $x \in A$ et $x \in f(A)$.

(c) (0.5 points) Donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Solution : Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ et posons $A = \{1\}$, $B = \{-1\}$. Alors $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ mais $f(A) \cap f(B) = \{1\}$ car $f(A) = \{1\}$ et $f(B) = \{1\}$.
Erreur courante. Tenter de répondre sans donner d'exemple. Lisez mieux l'énoncé.

9. (2 points) Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Solution : Procédons par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que f est injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ donc il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $f(x_1) = y$ et $f(x_2) = y$. Or f est injective, donc $x_1 = x_2$. Ainsi x_1 appartient à A et à B donc $x_1 \in A \cap B$. Puisque $f(x_1) = y$, on a donc $y \in f(A \cap B)$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Montrons que f est injective, c'est-à-dire que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2).$$

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ et notons y ce nombre. Posons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. Alors $f(A) = \{y\}$ et $f(B) = \{y\}$, de sorte que $f(A) \cap f(B) = \{y\}$. On a donc par hypothèse $\{y\} \subset f(A \cap B)$, c'est-à-dire $y \in f(A \cap B)$. On peut donc trouver un élément $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Alors $x \in A = \{x_1\}$ donc $x = x_1$. De même $x \in B = \{x_2\}$, donc $x = x_2$. Ainsi $x_1 = x = x_2$.

Erreur courante. Confondre x_1 et x_2, qui appartiennent à E, avec A et B qui sont des parties de E.

Étude d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

10. (1 point) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété « pour tout $k \leq n$, u_k est bien défini et $u_k > 0$ ».
Initialisation. Posons $n = 0$. Soit $k \leq 0$. Par hypothèse, u_0 est défini par l'énoncé et $u_0 > 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$. Alors $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est bien défini et est strictement positif en tant que somme de réels strictement positifs. Ainsi $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$ est bien défini et est non nul, donc strictement positif. Soit $k \leq n+1$, on a $k = n+1$ ou $k \leq n$. Dans tous les cas u_k est bien défini et $u_k > 0$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \leq n$, le nombre u_k est bien défini et $u_k > 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
Erreur courante. Omettre le raisonnement par récurrence.

11. (a) (1 point) Démontrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite, et en multipliant par la quantité conjuguée :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} - \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} = \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}} = \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n}.$$

Erreur courante. Écrire une horreur de calcul de la forme $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$.

(b) (0.5 points) Établir la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1} + u_n} > 0$ car $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. On en déduit que la suite est strictement croissante.
Erreur courante. Ne pas introduire la variable n, omettre le quantificateur.

(c) (1 point) Montrer que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\ell > 0$.

Solution : La suite étant croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$. Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \geq u_0$. Or $u_0 > 0$, donc $\ell > 0$.
Erreur courante. Affirmer directement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ entraîne $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$.

(d) (1 point) En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Solution : D'après le théorème de la limite monotone, il suffit de prouver que (u_n), qui est croissante, n'est pas majorée. Supposons donc au contraire qu'elle le soit. Alors d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ, et $\ell > 0$ d'après la question précédente. On en déduit que $u_{n+1} - u_n \to \ell - \ell = 0$ et $\frac{u_n}{u_{n+1}+u_n} \to \frac{\ell}{\ell+\ell} = \frac{1}{2}$. D'après la relation de la question (a) on a alors $0 = \frac{1}{2}$ par unicité de la limite, ce qui est absurde. Donc (u_n) n'est pas majorée.
Erreur courante. Bluffer en ne justifiant pas pourquoi (u_n) n'est pas majorée.

12. (a) (2 points) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

Solution : On sait que u_n et u_{n+1} tendent vers $+\infty$, donc $u_{n+1} + u_n$ aussi et $\dfrac{1}{u_{n+1} + u_n}$ tend vers 0. Puisque la relation de la question 11.(a) se réécrit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{1}{u_{n+1} + u_n}$, on en déduit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ tend vers 0, et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1.
Erreur courante. Écrire que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{+\infty}{+\infty} = 1$ alors qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

(b) (1 point) En déduire la convergence et la limite de $(u_{n+1} - u_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution : D'après 11.(a), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} + 1}$.
Or la question précédente et le théorème d'opérations sur les limites montrent que :

$$\frac{1}{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers la limite $\dfrac{1}{2}$.
Erreur courante. Écrire que $u_{n+1} - u_n$ tend vers $(+\infty) - (+\infty)$ (forme indéterminée) donc vers 0.