Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

E1A

5 novembre 2016

1 Questions diverses

1. **(1 pt.)**
Arithmétique : $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. On a alors $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Géométrique : $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. On a alors $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. **(2 pt.)** Soient r et q réels tels que (u_n) est arithmétique de raison r et géométrique de raison q. D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0+(n+1)r = q(u_0+nr)$, ou encore $nr(1-q) = r+(q-1)u_0$. En prenant $n = 0$ puis $n = 1$, on en déduit que $r + (q-1)u_0 = 0$, puis $r(1-q) = 0$. Ainsi, $r = 0$ ou $q = 1$. Dans les deux cas, ceci montre que la suite est constante d'après les formules de la question précédente.
3. **(2 pt.)** Propriété : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.
Les réels 5 et -11 sont racines de $(X + 5)(X - 11) = X^2 - 6X + 55$. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} - 6v_{n+1} + 55 = 0$. D'après le cours, il existe A et B réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = A(-5)^n + B(11)^n$. Les conditions $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$ montrent que $A = 1$ et $B = 2016$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont égales. En particulier, (u_n) vérifie $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 55u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. **(2 pt.)** Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1})$.
Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: $(n \geq 2017)$. La propriété $\mathcal{P}_{2016}$ est bien sûr fausse. Prouvons cependant que l'hérédité est vraie :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$. D'après $\mathcal{P}_n$, on sait que $n \geq 2017$, donc $n + 1 \geq 2018$ et en particulier $n + 1 \geq 2017$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
5. **(2 pt.)** On procède par récurrence. Initialisation : $3^4 = 9^2 = 81$ et $5 \cdot 4 + 12 = 32$, donc l'inégalité $3^n \geq 5 \cdot n + 12$ est bien vérifiée pour $n = 4$.
Hérédité : soit $n \geq 4$. Supposons que $3^n \geq 5n + 12$ et montrons que $3^{n+1} \geq 5(n + 1) + 12$. Puisque $3^n \geq 5n + 12$, on sait que $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 15n + 36$, donc il suffit de montrer que $15n + 36 \geq 5(n + 1) + 12$. Ceci équivaut à $n \geq -\frac{19}{10}$ qui est bien vérifiée, donc l'inégalité $3^{n+1} \geq 5(n + 1) + 12$ est établie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a $3^n \geq 5n + 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. **(2 pt.)** Puisque $x^2 - 2 \geq 0$ équivaut à $|x| \geq \sqrt{2}$, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\lvert x^2-2\rvert$		x^2-2	0	$2-x^2$	0	x^2-2	

L'ensemble des solutions de $x^2 - 2 \geq 2$ dans $]-\infty; -\sqrt{2}]$ est $]-\infty; -2]$. L'ensemble des solutions de $2-x^2 \geq 2$ dans $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ est $\{0\}$. L'ensemble des solutions de $x^2-2 \geq 2$ dans $]\sqrt{2}; +\infty[$ est $[2; +\infty[$. L'ensemble des solution de $|x^2-2| \geq 2$ dans $\mathbb{R}$ est donc finalement :

$$]-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty[.$$

7. **(1 pt.)** Notons déjà que l'équation n'est définie que pour $x \geq -2$. De plus, pour tout $x \geq -2$, $\sqrt{x+2} = x$ si et seulement si $x \geq 0$ et $x^2 = x + 2$ (définition de la racine carrée). Les racines de $X^2 - X - 2$ sont -1 et 2. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{x+2} = x$ dans $\mathbb{R}$ est $\{2\}$.

2 Problème

A. Étude élémentaire

A.1 *Premiers pas.*

(a) **(1 pt.)** $u_1 = 1$, $u_2 = \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2 - 1} = \alpha + |\alpha| = 2\alpha$ car $\alpha \geq 0$, et

$$u_3 = 2\alpha^2 + \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1)4\alpha^2} = 2\alpha^2 + \sqrt{(2\alpha^2 - 1)^2} = 4\alpha^2 - 1 \qquad (\text{car } 2\alpha^2 - 1 \geq 2 - 1 \geq 0).$$

(b) **(1.5 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\alpha u_n \geq u_n$ car $\alpha \geq 1$. De plus, $1 + (\alpha^2 - 1)u_n^2 > 0$, donc on en déduit que $u_{n+1} \geq u_n + \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1)u_n^2} > u_n$. D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Ceci étant vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite est strictement croissante.

(c) **(1 pt.)** Une suite croissante (u_n) est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$. Ceci montre que la suite est minorée par $u_0 = 0$.

A.2 *Un cas particulier.* Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = 1$.

(a) **(1 pt.)** Pour $\alpha = 1$, la relation de récurrence se réécrit $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 1$. La suite est donc arithmétique de raison 1.

(b) **(0.5 pt.)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \cdot 1 = n$.

(c) **(1 pt.)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} u_n = \sum_{n=1}^{100} n = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} u_n^2 = \sum_{n=1}^{100} n^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 33835$.

A.3 *Quelques inégalités.*

(a) **(0.5 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - \alpha u_n = \sqrt{1 + (\alpha^2 - 1)u_n^2}$. Or $1 + (\alpha^2 - 1)u_n^2 \geq 1$ car un carré est toujours positif. Par croissant de la fonction racine carrée, on a donc $u_{n+1} - \alpha u_n \geq \sqrt{1} = 1$.

(b) **(1 pt.)** Procédons par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, les deux sommes sont nulles (sommes sur un ensemble vide) donc la propriété est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{u_k}{\alpha^k} \right) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha^{k+1}}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} \left(\frac{u_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{u_k}{\alpha^k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{u_k}{\alpha^k} \right) + \frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{u_n}{\alpha^n} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha^{k+1}} + \frac{u_{n+1} - \alpha u_n}{\alpha^{n+1}}$$

Mais d'après la question précédent $u_{n+1} - \alpha u_n \geq 1$, donc on a en fait

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} \left(\frac{u_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{u_k}{\alpha^k} \right) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha^{k+1}} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \sum_{k=0}^{(n+1)-1} \frac{1}{\alpha^{k+1}}.$$

(c) **(1 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par sommation télescopique, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{u_k}{\alpha^k} \right) = \frac{u_n}{\alpha^n} - \frac{u_0}{\alpha^0} = \frac{u_n}{\alpha^n}$.

On reconnait une somme géométrique : si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k+1} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - (\frac{1}{\alpha})^n}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{1 - (\frac{1}{\alpha})^n}{\alpha - 1}$.

Si $\alpha = 1$, la somme vaut n.

(d) **(1 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\alpha \geq 1$, les deux questions précédentes montrent que dans tous les cas $u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^n}{\alpha^k} = \sum_{l=1}^{n} \alpha^l \geq \sum_{l=1}^{n} 1 = n$. Supposons que la suite (u_n) est majorée. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. D'après ce qui précède, on aurait donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq M$. Or on peut trouver un entier n tel que $n > M$ (par exemple $n = \lfloor M \rfloor + 1$), donc ceci est absurde. La suite n'est donc pas majorée.

A.4 *Une première formule explicite.* On suppose maintenant que $\alpha > 1$.

(a) **(1.5 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de récurrence,

$$1 + (\alpha^2 - 1)u_n^2 = (u_{n+1} - \alpha u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 2\alpha u_n u_{n+1} + \alpha^2 u_n^2.$$

L'égalité en découle après simplification.

(b) **(1.5 pt.)** En notant r_1 et r_2 les racines, on a la factorisation $X^2 - 2\alpha u_{n+1} X + u_{n+1}^2 - 1 = (X - r_1)(X - r_2)$. Or $(X - r_1)(X - r_2) = X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1 r_2$. Puis ces deux polynômes sont égaux, ils ont les mêmes coefficients. Donc $r_1 + r_2 = 2\alpha u_{n+1}$.

(c) **(1 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après **A.4(a)**, on a $u_n^2 - 2\alpha u_{n+1} u_n + u_{n+1}^2 - 1 = 0$, mais aussi $u_{n+2}^2 - 2\alpha u_{n+1} u_{n+2} + u_{n+2}^2 - 1 = 0$. Ceci montre que u_n et u_{n+2} sont racines du poylnôme de la question précédente (et $u_n \neq u_{n+2}$ par stricte croissance). Donc $u_n + u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1}$.

(d) **(2 pt.)** On vient de montre que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\alpha u_{n+1} + u_n$. Le polynôme associé $X^2 - 2\alpha X + X$ possède deux racines distinctes : $\lambda = 1 + \sqrt{a^2 - 1}$ et $\mu = 1 - \sqrt{a^2 - 1}$. D'après le théorème du cours, il existe donc A et B réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$, qu'on détermine à partir des valeurs de u_0 et u_1. On obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(a + \sqrt{a^2 - 1})^n - (a - \sqrt{a^2 - 1})^n}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

B. Une suite auxiliaire

On introduit maintenant deux fonctions réelles ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch} : t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{sh} : t \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

B.5 *Définition de la suite auxiliaire.*

(a) **(2 pt.)** On a $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = u \iff e^t - e^{-t} - 2u = 0 \iff e^t(e^t - e^{-t} - 2u) = 0$ car $e^t \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{sh}(t) = u$ si et seulement si $e^t(e^t - e^{-t} - 2u) = (e^t)^2 - 2ue^t - 1 = 0$, c.q.f.d.
Le polynôme $X^2 - 2uX - 1$, de discriminant $4(u^2 + 1) > 0$ possède deux racines distinctes $u + \sqrt{u^2 + 1} > 0$ et $u - \sqrt{u^2 + 1} < 0$. Or $e^t > 0$ pour tout réel t, donc on en déduit que $\mathrm{sh}(t) = u$ si et seulement $e^t = u + \sqrt{u^2 + 1}$. Ceci équivaut à $t = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$.

(b) **(0.5 pt.)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qu'on vient de voir $\mathrm{sh}(t_n) = u_n$ équivaut à $t_n = \ln(u_n + \sqrt{u_n^2 + 1})$. Or c'est la définition de t_n, donc l'égalité $\mathrm{sh}(t_n) = u_n$ est vraie.

(c) **(2 pt.)** On montre cette fois que $\mathrm{ch}(t) = \alpha$ si et seulement si e^t est racine de $X^2 - 2\alpha X + 1$. Le discriminant $4(\alpha^2 - 1)$ est positif car $\alpha \geq 1$, et les racines sont donc $\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ qui sont toutes les deux strictement positives. L'ensemble des solution de $\mathrm{ch}(t) = \alpha$ est finalement $\{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}; \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\}$.

B.6 *Expression de la suite.* On admet qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{ch}(a) = \alpha$.

(a) **(1 pt.)** Il suffit de développer les carrés :

$$(e^a + e^{-a})^2 - (e^a - e^{-a})^2 = e^{2a} + 2e^a e^{-a} + e^{-2a} - e^{2a} + 2e^a e^{-a} - e^{-2a} = 4e^a e^{-a} = 4$$

Le résultat en découle après division par $2^2 = 4$.

(b) **(1 pt.)** Même genre de calcul que ci-dessus.

(c) **(0 pt.)** La question est infaisable car il y avait une erreur dans l'énoncé ! La suite (t_n) devrait être définie de manière à ce que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sh}(t_n) = \sqrt{\alpha^2 - 1}\, u_n$. Dans ce cas, la relation de récurrence s'écrit

$$\frac{\operatorname{sh}(t_{n+1})}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \operatorname{sh}(t_n) + \sqrt{1+\operatorname{sh}(t_n)^2}.$$

Or $\alpha = \operatorname{ch}(a)$ et $\sqrt{\alpha^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}(a)^2-1} = \sqrt{\operatorname{sh}(a)^2} = \operatorname{sh}(a)$ car $\operatorname{sh}(a) \geq 0$. De même, $\sqrt{1+\operatorname{sh}(t_n)^2} = \sqrt{\operatorname{ch}(t_n)^2} = \operatorname{ch}(t_n)$ car $\operatorname{ch}(t_n) \geq 0$. On obtient donc finalement,

$$\operatorname{sh}(t_{n+1}) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(t_n) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(t_n) = \operatorname{sh}(t_n + a).$$

Ainsi, $t_n + a$ et t_{n+1} sont solutions de $\operatorname{sh}(t) = u$ pour $u = \operatorname{sh}(t_{n+1})$. Mais on a vu que cette équation admet une unique solution qui est $\ln(u + \sqrt{u^2+1})$. Donc $t_n + a = t_{n+1}$.

(d) **(1 pt.)** D'après la question précédente, la suite (t_n) est arithmétique de raison a. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 + na$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{sh}(t_n) = \operatorname{sh}(t_0 + na)$.

C. Fonctions hyperboliques

C.7 *Sinus et cosinus sont dans un bateau.*

(a) **(1 pt.)** ch est paire et sh est impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

(b) **(1 pt.)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = \frac{1}{2}(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 \geq 0$.

(c) **(2 pt.)** $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 > 0$, on obtient le premier tableau. Puis on en déduit le deuxième en remarquant que $\operatorname{sh}(0) = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x)$	$+$	
sh	$\nearrow$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$	$-$	0	$+$
ch	$\searrow$	1	$\nearrow$

(d) **(1 pt.)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} > 0$.

C.8 *Deux inéquations.*

(a) **(1.5 pt.)** L'équation est bien définie à condition que $x^2 - 1 \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

- Pour $x \in]-\infty; -1]$, l'équation équivaut à $\sqrt{x^2-1} > -x$, ou encore à $x^2 - 1 > (-x)^2$ car $-x > 0$. Il n'y a aucune solution dans cet intervalle.
- Pour $x \in [1; +\infty[$, l'équation équivaut à $\sqrt{x^2-1} > -x$, ce qui est toujours vrai car $-x < 0$. Tout élément de cet intervalle est solution.

L'ensemble des solutions est donc finalement $[1; +\infty[$.

(b) **(1.5 pt.)** L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \geq 1 \geq 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$ par stricte croissance de la racine carrée, et de plus $\sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, de sorte que $\sqrt{x^2+1} > -x$ et donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
L'ensemble des solutions est donc finalement $\mathbb{R}$.

C.9 *Étude de* argsh : $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(a) **(1 pt.)** La fonction est impaire, prouvons-le. Notons déjà qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$ d'après C.8.(b). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x)+\operatorname{argsh}(-x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$, ce qui est égal à $\ln\Big((x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})\Big)$ par propriété de logarithme. Un identité remarquable montre que cette expression vaut $\ln(-x^2+x^2+1) = \ln(1) = 0$. On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(-x) = -\operatorname{argsh}(x)$.

(b) **(2 pt.)** Pour que $\operatorname{argsh}(x)$ soit bien défini, il faut que $x^2+1 \in \mathbb{R}_+$ et $x+\sqrt{x^2+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}$ d'après C.8.(b). Pour que argsh soit dérivable en x, il faut que $x^2+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x+\sqrt{x^2+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Le domaine de dérivabilité est donc $\mathbb{R}$ également car la condition supplémentaire $x^2+1 \neq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée s'obtient à partir de la formule pour $x \mapsto \ln(u(x))$ et $x \mapsto \sqrt{u(x)}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x+0}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Elle est partout strictement positive, donc argsh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) **(1 pt.)** La tangente passant par le point $(0, \operatorname{argsh}(0))$ est la droite d'équation $y = x$ car $\operatorname{argsh}(0) = 0$ et $\operatorname{argsh}'(0) = 1$.

C.10 *Étude de* argch : $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(a) **(2 pt.)** Pour que $\operatorname{argch}(x)$ soit bien défini, il faut que $x^2-1 \in \mathbb{R}_+$ et $x+\sqrt{x^2-1} \in \mathbb{R}_+^*$. Le domaine de définition est donc $[1;+\infty[$ d'après C.8.(a). Pour que argch soit dériable en x, il faut que $x^2-1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x+\sqrt{x^2-1} \in \mathbb{R}_+^*$. Le domaine de dérivabilité est donc $]1;+\infty[$. Pour tout $x > 1$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{2x-0}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Elle est partout strictement positive, donc argch est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

(b) **(1 pt.)** Question piège : la fonction n'est pas définie en 0...

C.11

(a) **(2 pt.)** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(x)^2-1}}\operatorname{ch}'(x) - 1 = \frac{1}{|\operatorname{sh}(x)|}\operatorname{sh}(x) - 1 = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ -2, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}(x)^2+1}}\operatorname{sh}'(x) - 1 = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\operatorname{ch}(x) - 1 = 0 \qquad (\text{note : } \operatorname{ch}(x) > 0).$$

(b) **(1 pt.)** Puisque $f(x) = g(x) = 0$, on peut en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $x \geq 0$, $f(x) = -2x$ si $x \leq 0$, et $g(x) = x$. Ainsi,

$$\operatorname{argch}(\operatorname{ch}(x)) = f(x) + x = |x|, \qquad \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = g(x) + x = x.$$

D. Scilab (2 pt.)

```
function y = sh(x)
  y = (exp(x)-exp(-x))/2
endfunction
```

E. Commentaires

Vous savez tous répondre à la plupart des questions, mais vous marquez très peu de points car vous allez trop vite et vous ne vous relisez pas. Ces négligences vous font faire des erreurs de niveau collège qui annihilent vos efforts : **zéro automatique**. Prenez votre temps, vous devez être sûr de chaque enchaînement au point d'y mettre vos deux mains à couper. Optimisez votre efficacité : à quoi sert de faire le sujet en entier si vous ne marquez aucun point ?

Voici, après dépouillement des copies, le classement des erreurs les plus populaires :

1. *Erreur :* $a^2 = b^2 \iff a = b$, *niveau troisième. 21 copies.*
   Ceci revient à dire que $-1 = 1$. La version correcte est $a^2 = b^2 \iff (a = b \text{ ou } a = -b)$ comme le montre la factorisatiion $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Ceci peut aussi s'écrire avec des valeurs absolues : $a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$.

2. *Erreur :* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, *niveau troisième. 15 copies.*
   Un grand classique... Pourtant, vous savez tous que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3. *Erreur :* $x^2 \geq 4 \iff (x \geq 2 \text{ ou } x \geq -2)$, *niveau seconde. 12 copies.*
   Un tableau de signe de $x^2 - 4$ ou un simple croquis suffit pourtant à voir que $x^2 \geq 4$ si et seulement si ($x \geq 2$ ou $x \leq -2$). On peut aussi écrire $x^2 \geq 4 \iff |x| \geq 2$.

4. *Erreur :* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, *niveau troisième. 9 copies.*
   Il n'existe aucune règle de calcul de racine carrée pour une somme ou une différence !

5. *Erreur :* $a^2 \geq 0 \iff a \geq 0$, *niveau quatrième. 9 copies.*
   Tout nombre serait donc positif.

6. *Erreur : échanger un* $\forall$ *et un* $\exists$, *niveau petite enfance.*
   C'est une erreur grave de logique.

7. *Erreur :* $u(x)' = \ldots$ *Erreur :* $u' = 2x$.
   Vous confondez les nombres $u(x)$ et $u'(x)$ avec les fonctions u et u'.

8. *Erreur : le nombre* $\sqrt{x}$ *est défini si et seulement si* $x > 0$.
   Vous oubliez que $\sqrt{0}$ est parfaitement défini puisque 0 est l'unique solution de $y^2 = 0$.

9. *Erreur : il n'existe pas de réel* x *tel que* $x^2 \leq 0$, *niveau quatrième.*
   Vous oubliez 0 lui-même.

10. *Erreur : confondre « fonction paire » et « nombre pair ».*
    Ce sont deux notions différentes, portant sur des objets de natures différentes.

11. *Erreur : remplacer « arithmétique et géométrique » par « arithmético-géométrique ».*
    Il suffit de bien lire l'énoncé.

12. *Erreur :* $u_0 < u_1 < u_2$ *donc* (u_n) *est strictement croissante.*
    Il faut démontrer que **pour tout** n entier, $u_n < u_{n+1}$. Mille exemples ne suffisent pas.

13. *Erreur :* $\sum_{n=0}^{100} u_n = u_n \sum_{n=0}^{100} 1$.
    Le terme u_n dépend de l'indice de sommation n qui n'est pas défini en dehors de la somme.

14. *Erreur : « Il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n = u_0 + nr$. *Posons* $r = 0$. *Alors* $u_n = u_0$. *»*
    Vous faites semblant d'avoir lu $\forall$ au lieu de $\exists$.

15. *Erreur :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha^k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha^k}$.
    C'est la version « classes préparatoires » de l'erreur de quatrième $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$.