Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 6

E1A 2016–2017

Vacances de Pâques

Exercice 1 (EDHEC 2016 E)

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1) Étude de f_n.

   a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

   Solution. D'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $t \to e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, f_n est son unique primitive telle que $f_n(n) = 0$. En particulier, f_n est donc de classe C^1 (en tant que primitive d'une fonction continue) et $\boxed{\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = e^{\sqrt{x}}.}$ Sa dérivée étant partout strictement positive, $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[.}$

   b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Solution. Soit $x \in [n, \infty[$ et $t \in [n, x]$. Par stricte croissance de l'exponentielle, on sait que $e^{\sqrt{t}} > e^{\sqrt{n}} \geq e^0$, d'où $e^{\sqrt{t}} > 1$. Puisque $n \leq x$, on obtient :

   $$\forall x \in [n, +\infty[\ ,\ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt \geq \int_n^x 1\, dt = x - n.$$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - n) = +\infty$, donc par minoration, on a aussi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.}$

   c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

   Solution. Soit n un entier naturel. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$. De plus, $f_n(n) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Or $1 \in [0, +\infty[$, donc il existe un élément $x \in [n, +\infty[$ unique tel que $f_n(x) = 1$. On le note u_n.

2) Étude de la suite (u_n).

   a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [n, +\infty[$. En particulier, $u_n \geq n$. Donc, par théorème de comparaison (ici une minoration), $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $f_n(u_n) = \displaystyle\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt = 1$. Or $u_n \geq n$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in [n, u_n], & \qquad e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}}. \\ \text{Donc :} & \quad \int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}} dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}} dt, \\ \text{et donc :} & \quad (u_n - n)\, e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) \leq (u_n - n)\, e^{\sqrt{u_n}}. \end{aligned}$$

Puisque $f_n(u_n) = 1$, la première inégalité fournit $(u_n - n)\, e^{\sqrt{n}} \leq 1$, d'où $(u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}$. De même, la deuxième inégalité équivaut à $1 \leq (u_n - n)\, e^{\sqrt{u_n}}$, d'où $e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n - n)$. On a donc bien encadré la différence $u_n - n$: $\boxed{e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}.}$

3) a) Utiliser la question 2.b) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while .......
  n = .......
end
disp(n)
```

Solution. Puisque 2.b) donne $0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}$, on aura $(u_n - n) \leq 10^{-4}$ dès que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$ (condition suffisante mais *a priori* non nécessaire). On va donc à partir de $n = 0$, incrémenter n de 1 en 1, tant que $e^{-\sqrt{n}} > 10^{-4}$.

```
n = 0
while exp(-sqrt(n)) > 10^(-4)
  n = n+1
end
disp(n)
```

b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.

Solution. On a $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \iff -\sqrt{n} \leq -4\ln(10) \iff n \geq (4\ln(10))^2$. Or $(4\ln(10))^2 \simeq 16 \times (2{,}3)^2 \simeq 84{,}64$ donc $\boxed{\text{le script précédent va afficher la valeur 85.}}$

4) On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Solution. D'après 2.b), $0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement : $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } 0.}$

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

Solution. Pour tout $x \geq -1$, on a par équivalences successives :

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+x} \leq 1 + \tfrac{x}{2} \\ \iff \quad & 1 + x \leq (1 + \tfrac{x}{2})^2 \qquad \text{(stricte croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ \iff \quad & 1 + x \leq 1 + x + \tfrac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x \geq -1$ car $x^2 \geq 0$. Il en va donc de même pour l'inégalité $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ qui lui est équivalente.

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\Big(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\Big)$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les équivalences successives :

$$\begin{array}{rcl} & e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) & \\ \iff & e^{-\sqrt{u_n}+\sqrt{n}} \geq \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) & \text{(multiplication par } e^{\sqrt{n}} > 0) \\ \iff & \sqrt{u_n} - \sqrt{n} \leq \frac{v_n}{2\sqrt{n}} & \text{(stricte décroissance de } t \mapsto e^{-t}\text{)} \\ \iff & \sqrt{v_n + n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} & \text{(car } u_n = v_n + n) \\ \iff & \sqrt{\frac{v_n}{n} + 1} \leq 1 + \frac{1}{2}\frac{v_n}{n} & \text{(division par } \sqrt{n} > 0) \end{array}$$

Or $\frac{v_n}{n} \geq 0$, donc la dernière inégalité est vérifiée en vertu du 4.b). Le résultat s'ensuit.

d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Solution. On divise l'encadrement obtenu en 2.b) par $e^{-\sqrt{n}}$, ce qui donne

$$\frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1, \quad \text{d'où :} \quad \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1 \quad \text{d'après 4c).}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1$, par continuité de exp en 0 et par composition. Par encadrement, il vient donc $\dfrac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Par conséquent : $\boxed{u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.}$

Exercice 2 (adapté d'après EDHEC 2016 E)

Partie I : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

5) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

Solution. Puisque $x < 1$ et $t \leq x$, on sait que $t \neq 1$. Avec le changement d'indice $p \leftarrow p-1$, et la formule de sommation des suites géométriques, on trouve donc :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \underset{\substack{\text{c.d.i.} \\ p\leftarrow p-1}}{=} \sum_{p=0}^{n-1} t^p = t^0 \times \frac{1 - t^{n-1-0+1}}{1-t} = \boxed{\frac{1-t^n}{1-t}.}$$

b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

Solution. On intègre l'égalité précédente sur $[0, x]$, où les fonctions sont continues :

$$\int_0^x (\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}) dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt.$$

et par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{p=1}^{n} (\int_0^x t^{p-1} dt) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt,$$

et enfin :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$$

c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0.$

Solution. Pour tout $t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$ car $0 < 1-x \leq 1-t$ et $t^n \geq 0$.

Or $0 \leq x$, donc en intégrant sur $[0,x]$, on obtient : $\boxed{0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt.}$

De plus, $\int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, donc :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0.}$

d) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$

Solution. On déduit de ce qui précède la convergence de la suite des sommes partielles :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x).$$

La série de terme général $\left(\frac{x^p}{p}\right)_{p\geq 1}$ est donc convergente, et : $\boxed{\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$

6) Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geq m, \quad \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

Solution. On raisonne par récurrence sur q à l'aide de la formule de Pascal. Rappel : pour tout couple (m,n) d'entiers naturels, $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$.

Initialisation : si $q = m$,

$$\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}.$$

Hérédité : soit q tel que $\sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}.$$

7) (Difficile) On suppose que $x \in]0,1[$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Solution. Sans étapes intermédiaires, cette question est en fait **extrêmement difficile** ! Mais la démarche est classique et naturelle, il s'agit de démonter le résultat par récurrence en introduisane la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$) :

« *la série de terme général* $\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}$, *défini pour tout* $k \geq n$,

est convergente et elle admet pour somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$, on travaille avec la série de terme général

$$u_k = \binom{k-1}{0}(1-x)^{k-1} = (1-x)^{k-1}, \qquad \text{défini pour } k \geq 1.$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $1-x$ qui vérifie $0 < 1-x < 1$ puisque $0 < x < 1$. La série est donc convergente, et elle admet pour somme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-x)^{k-1} \underset{\substack{\text{c.d.i.} \\ k \leftarrow k-1}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x},$$

Ceci démontre la proposition initiale $\mathcal{P}_1$.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}_n$, et va démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$. On étudie donc la convergence de la série de terme général

$$u_k = \binom{k-1}{n}(1-x)^{k-n-1}, \qquad \text{défini pour } k \geq n+1.$$

La question 6) avec $q = k-2$ et $m = n-1$ permet de décomposer le coefficient binomial :

$$\binom{k-1}{n} = \binom{k-2+1}{n-1+1} = \sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1} \underset{\substack{\text{c.d.i.} \\ i \leftarrow i+1}}{=} \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1}.$$

Ceci nous permet d'exprimer les sommes partielles de $\sum u_k$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{N} u_k &= \sum_{k=n+1}^{N} \left[\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1}(1-x)^{k-n-1} \right] \\
&= \sum_{k=n+1}^{N} \sum_{i=n}^{N-1} \binom{i-1}{n-1}(1-x)^{k-n-1} \mathbf{1}_{\{i \leq k-1\}} && \text{(ajout d'une indicatrice)} \\
&= \sum_{i=n}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \binom{i-1}{n-1}(1-x)^{k-n-1} \mathbf{1}_{\{i \leq k-1\}} && \text{(échange des sommations)} \\
&= \sum_{i=n}^{N-1} \binom{i-1}{n-1} \left[\sum_{k=i+1}^{N} (1-x)^{k-n-1} \right]. && (i \leq k-1 \iff k \geq i+1)
\end{aligned}$$

Or la formule de sommation d'une suite géométrique de raison $1-x \neq 1$ donne

$$\sum_{k=i+1}^{N} (1-x)^{k-n-1} = (1-x)^{i+1-n-1} \times \frac{1-(1-x)^{N-i-1+1}}{1-(1-x)} = \frac{(1-x)^{i-n}}{x} - \frac{(1-x)^{N-n}}{x},$$

donc on obtient une décomposition $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k = A_N - B_N$ des sommes partielles, avec :

$$A_N = \frac{1}{x} \sum_{i=n}^{N-1} \binom{i-1}{n-1}(1-x)^{i-n}, \qquad \text{et} \qquad B_N = \frac{(1-x)^{N-n}}{x} \sum_{i=n}^{N-1} \binom{i-1}{n-1}.$$

Le terme A_N fait intervenir la somme partielle d'ordre $N-1$ de la série de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$. Ce terme converge donc pour $N \to \infty$, et plus précisément :

$$A_N = \frac{1}{x}\sum_{i=n}^{N-1}\binom{i-1}{n-1}(1-x)^{i-n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{x}\sum_{i=n}^{\infty}\binom{i-1}{n-1}(1-x)^{i-n} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Il reste seulement à vérifier que le terme B_N tend vers 0. En utilisant à nouveau la question précédente, on peut majorer ce terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B_N = \frac{(1-x)^{N-n}}{x}\binom{N-1}{n} &= \frac{(1-x)^{N-n}}{x}\times\frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-n)}{n!} \\ &\leq \frac{(1-x)^{N-n}}{x}\times\frac{N^n}{n!} \\ &\leq C\times(1-x)^N\times N^n, \quad \text{pour } C = \frac{(1-x)^{-n}}{n!\,x}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N\to\infty}(1-x)^N = 0$ car $|1-x| < 1$ et on a même $\lim\limits_{N\to\infty}(1-x)^N\times N^n = 0$ par croissances comparées. Puisque C ne dépend pas de N et $B_N \geq 0$, on obtient finalement $\lim\limits_{N\to\infty} B_N = 0$ d'après le théorème d'encadrement. Par somme de limites, on en déduit la convergence de la suite des sommes partielles :

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=n+1}^{N}\binom{k-1}{n}(1-x)^{k-n-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{x^{n+1}},$$

ce qui démontre la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Partie II : sommes de séries.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\,\ln p}$$

8) a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

Solution. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Avec les conditions de l'énoncé, $q > 0$ et $\ln(p) < 0$ car $p < 1$. Ainsi, $q^k > 0$ et $-\ln(p) > 0$ donc par quotient : $u_k > 0$.

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie I, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

Solution. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q^k}{k}$. Or $0 < q < 1$, donc d'après le I.5), la série $\sum \frac{q^k}{k}$ est convergente. Ainsi, il en va de même pour $\sum u_k$, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln p}\times(-\ln(1-q)) = \frac{\ln(1-q)}{\ln p} = \frac{\ln p}{\ln p} = 1.$$

9) a) Montrer que la série de terme général $(k\,u_k)_{k\geq 1}$ converge et calculer $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,u_k$.

Solution. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\,u_k = -\dfrac{1}{\ln p} \times q^k$. Or $|q| < 1$, donc la série géométrique $\sum q^k$ est convergente. Il en va donc de même pour $\sum k u_k$, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,u_k = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k - q^0\right) = -\frac{1}{\ln p}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \boxed{-\frac{q}{p\ln p}.}$$

b) Montrer que la série de terme général $(k^2\,u_k)_{k\geq 1}$ est aussi convergente, et vérifier que :

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,u_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\,u_k\right)^2 = -\frac{q(q+\ln\,p)}{(p\,\ln\,p)^2}.$$

Solution. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^2 u_k = -\dfrac{1}{\ln p} \times kq^k = -\dfrac{q}{\ln p} \times kq^{k-1}$. Or $|q| < 1$, donc la série géométrique « dérivée » $\sum kq^{k-1}$ est convergente, et $\sum k^2 u_k$ aussi. De plus :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 u_k = -\frac{q}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = -\frac{q}{\ln p} \times \frac{1}{(1-q)^2} = -\frac{q}{p^2\ln p}.$$

En utilisant le résultat de la questions précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,u_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\,u_k\right)^2 &= -\frac{q}{p^2\ln p} - \left(-\frac{q}{p\ln p}\right)^2 \\
&= -\frac{q}{p^2\ln p} - \frac{q^2}{p^2(\ln p)^2} \\
&= -\frac{q}{p^2\ln p}\left(1 + \frac{q}{\ln p}\right) \\
&= -\frac{q}{p^2\ln p} \times \frac{\ln p + q}{\ln p} \\
&= \boxed{-\frac{q(q+\ln p)}{(p\,\ln p)^2}.}
\end{aligned}$$

10) On pose $v_0 = 1 + \dfrac{\ln(1+q)}{\ln p}$ et $v_k = -\dfrac{q^k}{k(1+q)^k\ln p}$ pour $k \geq 1$.

Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} v_k = 1$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\,v_k$ en fonction de $\ln p$ et q.

Solution. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$v_k = -\frac{1}{\ln p} \times \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k}, \qquad \text{et} \qquad k\,v_k = -\frac{1}{\ln p} \times \left(\frac{q}{1+q}\right)^k,$$

D'après I.5) et le cours sur les séries géométriques, on sait que les séries $\sum v_k$ et $\sum kv_k$ sont convergentes si $0 < \frac{q}{1+q} < 1$. Or cette condition est bien réalisée car $0 < q$ et $q < 1 + q$.

Calculons enfin les sommes de ces deux séries :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k &= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p} - \frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k} \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p} + \frac{1}{\ln p} \ln\left(1 - \frac{q}{1+q}\right) && \text{(d'après I.5.d)} \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p} - \frac{1}{\ln p} \ln(1+q) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on reconnaît une série géométrique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k\, v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, v_k &= -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q}\right)^k \\
&= -\frac{1}{\ln p} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{q}{1+q}} - 1\right) \\
&= \boxed{-\frac{q}{\ln p}.}
\end{aligned}$$