Devoir en temps libre n° 6

E1A 2016–2017

Vacances de Pâques

Exercice 1 (EDHEC 2016 E)

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1) Étude de f_n.
   a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
   c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2) Étude de la suite (u_n).
   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3) a) Utiliser la question 2.b) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while .......
  n = .......
end
disp(n)
```

   b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.
4) On pose $v_n = u_n - n$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.
   c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\Big(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\Big)$.
   d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2 (adapté d'après EDHEC 2016 E)

Partie I : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

5) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$

c) Établir par encadrement que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0.$

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$

6) Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geq m, \quad \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

7) (Difficile) On suppose que $x \in]0,1[$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Partie II : sommes de séries.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\,\ln p}$$

8) a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie I, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.$

9) a) Montrer que la série de terme général $(k\,u_k)_{k\geq 1}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,u_k.$

b) Montrer que la série de terme général $(k^2\,u_k)_{k\geq 1}$ est aussi convergente, et vérifier que :

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,u_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\,u_k\right)^2 = -\frac{q(q+\ln p)}{(p\,\ln p)^2}.$$

10) On pose $v_0 = 1 + \dfrac{\ln(1+q)}{\ln p}$ et $v_k = -\dfrac{q^k}{k(1+q)^k \ln p}$ pour $k \geq 1$.

Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} v_k = 1$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\,v_k$ en fonction de $\ln p$ et q.