Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 5

E1A 2016–2017

à rendre le 20 février

Pour les questions repérées par l'étiquette ***[aide]****, reportez-vous aux compléments en fin d'énoncé.*

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème et d'étudier la rentabllilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans la partie II de l'équation suivante pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie cette question dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

Partie I

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$
On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0,1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 : **[aide]**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$
On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0,1[$.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.

c) Calculer les dérivées f' et f'' de f et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$.

d) On considère la suite défnie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3. **[aide]**

Partie II

1. Etude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$
On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0,1[$ lorsque $N > a$.

b) Montrer la relation $(*)$: $(x-1) f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$.

2. Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante.
En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$.

b) Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$ lorsque $N \geq A$ où A est un entier naturel non nul.
En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de la suite $\left({x_N}^N\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation $(*)$, exprimer la limite x^* en fonction de a.

On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

c) Etablir à l'aide de la relation $(*)$ l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a).$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation $(*)$ un équivalent de ε_N en fonction de a et de N. **[aide]**

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est à dire pendant les années $1, 2, \ldots, N$.

Lorsque le taux d'intérêt des placements est supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)s$ à l'issue de l'année $1, \ldots,$ à une somme $s_n = (1+r)^n s$ à l'issue de l'année $n, \ldots$

Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n/(1+r)^n$ à l'issue de l'année 0 (puisque le placement d'une telle somme $S_n/(1+r)^n$ conduit précisément à l'obtention de la somme S_n à l'issue des n années de placement). Aussi appellera-t-on dans ce contexte *valeur présente* de la somme S_n la somme $S_n/(1+r)^n$.

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Montrer que la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale, compte tenu de la dépense initiale S_0 et des revenus attendus à :

$$VP(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0.$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée, c'est à dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer la somme S_0 au taux d'intérêt des placements comme on l'a décrit plus haut.

b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une unique racine strictement positive r_N et une seule si $N > S_0/S$, et donner l'expression de celle-ci en focntion de x_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$

c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N), puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0 et préciser un équivalent de l'erreur $r^* - r_N$ faite en remplaçant r_N par r^*. **[aide]**

Compléments de cours

Pour les questions **I.1.d** et **I.2.d**, vous pouvez admettre le résultat suivant :

Proposition (inégalité des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée bornée sur I par un réel M. Alors, pour tous $(x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.*

Les questions **II.2.c** et **II.3.c** nécessitent de connaître la définition suivante :

Définition. Soient (u_N) et (v_N) deux suites de réels *non nuls*. On dit que v_N est un *équivalent* de u_N (ce que l'on notera $u_N \sim v_N$) lorsque :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{u_N}{v_N} = 1.$$

Partie III. Questions classiques d'algèbre linéaire

Soient A, P et Q les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On notera I la matrice identité d'ordre 3.
Par convention, pour toute matrice carrée M d'ordre 3, on posera $M^0 = I$.

Mise en situation

Cette partie est indépendante des suivantes.

4. Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre λ réel :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x & & & & & = & 0 \\ x & + & (3-\lambda)y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

On pourra être amené à distinguer les cas $\lambda = 2$ et $\lambda \neq 2$.

Inversibilité

5. **a)** Calculer le produit PQ.

b) En déduire que P est inversible, et donner P^{-1}.

6. **a)** Résoudre le système suivant en fonction des paramètres a, b, c réels :

$$\begin{cases} & & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & y & & & = & c \end{cases}$$

b) Retouver le résultat de la question **6.b** à partir de cette résolution.

Calcul de puissances

7. On pose $B = P^{-1}AP$.

a) Calculer B.

On vérifiera que B s'écrit sous la forme $B = \alpha I + J$ où α est un réel, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

8. **a)** Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geq 2$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, la matrice B^n en fonction de I et de J. La formule obtenue est-elle encore valable pour $n = 1$? Pour $n = 0$?

c) Exprimer alors B^n sous la forme d'un tableau de nombres.

d) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Application

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ z_0 = 3 \text{ et les relations de récurrence } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

9. **a)** Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrer, par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

c) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Questions subsidiaires

10. Sans poser de calculs :

a) Simplifier le produit QP.

b) Montrer que la matrice Q est inversible, et exprimer Q^{-1}.

11. **a)** Justifier sans aucun calcul que B est inversible.

b) Développer $(B - 2I)^2$. En déduire une expression de B^{-1} en fonction de B.

c) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = I - \frac{1}{4}A$.

d) Retrouver ce résultat à l'aide du pivot de Gauss.