

Devoir en temps libre n° 5

E1A 2016–2017

à rendre le 20 février

Pour les questions repérées par l'étiquette [aide], reportez-vous aux compléments en fin d'énoncé.

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème est d'étudier la rentabilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans la partie II de l'équation suivante pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie cette question dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

Partie I

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

- a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2 .

Indication. Quelles sont les solutions de l'équation du second degré $x^2 + x - 1 = 0$?

- b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.

Indication. Pouvez-vous utiliser un argument de monotonie ?

- c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

Indication. Comment est définie la valeur absolue ? Pouvez-vous déterminer le signe de $f'(x)$?

- d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 :

[aide]

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Indication. Question difficile, mais extrêmement classique, qu'il faudra connaître parfaitement ! (on procède toujours de la même manière). Comment se simplifie $r_2 - f(r_2)$? En déduire la valeur de $f(r_2)$, puis démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \text{ et } |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9} \right)^n \right).$$

Dans l'hérédité, on majorera $|f(u_n) - f(r_2)|$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

- a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0, 1[$.

Indication. Voilà une question taillée pour le théorème de la b..... (version équation)! Alternativement, vous pouvez utiliser le théorème des v..... i..... couplé à un argument de stricte monotonie. Dans tous les cas, soyez prudents quant aux bornes de l'intervalle.

- b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.

Indication. Une étude de monotonie sera à nouveau bien utile.

- c) Calculer les dérivées f' et f'' de f et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$.

Indication. Étudier le signe et les variations de f' .

- d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3 .

[aide]

Indication. N'auriez-vous pas déjà rencontré une question similaire? Adaptez votre solution.

Partie II

1. Etude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$

On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a$.

- a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0, 1[$ lorsque $N > a$.

Indication. Ne vous laissez pas impressionner par la présence des variables « N » et « a » : procédez comme dans la partie précédente!

- b) Montrer la relation (*) : $(x - 1)f_N(x) = x^{N+1} - (a + 1)x + a$.

Indication. N'auriez-vous pas déjà rencontré des sommes similaires à $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x^1$ dans votre cours sur les suites usuelles?

2. Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0$

- a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante.

Indication. Utilisez un argument de stricte monotonie ou le théorème de la b.....

En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre x^* appartenant à $[0, 1[$.

Indication. Connaissez-vous un théorème de convergence qui pourrait s'appliquer ici?

- b) Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$ lorsque $N \geq A$ où A est un entier naturel non nul.

Indication. Quelle propriété bien connue d'une suite est en jeu ici?

En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de la suite $(x_N)^N$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation (*), exprimer la limite x^* en fonction de a .

Indication. Connaissez-vous beaucoup de théorèmes de convergence avec des encadrements ?

On convient alors de poser $x_N = \frac{a}{a+1} (1 + \varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

c) Etablir à l'aide de la relation (*) l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln \left(\frac{a}{a+1} \right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a).$$

Indication. Que vaut $f_N(x_N)$? Le reste est peut-être intimidant, mais ce n'est que du calcul élémentaire pour lequel il faut s'appliquer et ne surtout pas se décourager.

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation (*) un équivalent de ε_N en fonction de a et de N . **[aide]**

Indication. Question technique! Traitez les différentes limites dans l'ordre suggéré par l'énoncé. Avant de conclure, utilisez la relation (*) pour obtenir ε_N en fonction de a, N et $(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$.

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est à dire pendant les années $1, 2, \dots, N$.

Lorsque le taux d'intérêt des placements est supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)s$ à l'issue de l'année 1, \dots , à une somme $s_n = (1+r)^n s$ à l'issue de l'année n, \dots

Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n / (1+r)^n$ à l'issue de l'année 0 (puisque le placement d'une telle somme $S_n / (1+r)^n$ conduit précisément à l'obtention de la somme S_n à l'issue des n années de placement). Aussi appellera-t-on dans ce contexte *valeur présente* de la somme S_n la somme $S_n / (1+r)^n$.

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Montrer que la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale, compte tenu de la dépense initiale S_0 et des revenus attendus à :

$$VP(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \dots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0.$$

Indication. Il s'agit davantage d'une question de compréhension de texte que d'une question de mathématiques. Pour vous guider : combien de temps dure le placement de la somme S qui a été obtenue l'année i ? (avec $1 \leq i \leq N$)

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée, c'est à dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer la somme S_0 au taux d'intérêt des placements comme on l'a décrit plus haut.

b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une unique racine strictement positive r_N et une seule si $N > S_0/S$, et donner l'expression de celle-ci en fonction de x_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$

Indication. Voyez-vous un lien entre VP et la fonction f_N étudiée précédemment pour une valeur particulière de a ?

c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N) , puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0 et préciser un équivalent de l'erreur $r^* - r_N$ faite en remplaçant r_N par r^* . **[aide]**

Indication. Pour l'équivalent, commencez par exprimer $r^* - r_N$ en fonction de a, N et ε_N .

Compléments de cours

Pour les questions **I.1.d** et **I.2.d**, vous pouvez admettre le résultat suivant :

Proposition (inégalité des accroissements finis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée bornée sur I par un réel M . Alors, pour tous $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Les questions **II.2.c** et **II.3.c** nécessitent de connaître la définition suivante :

Définition. Soient (u_N) et (v_N) deux suites de réels *non nuls*. On dit que v_N est un *équivalent* de u_N (ce que l'on notera $u_N \sim v_N$) lorsque :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u_N}{v_N} = 1.$$

Partie III. Questions classiques d'algèbre linéaire

Soient A, P et Q les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On notera I la matrice identité d'ordre 3.

Par convention, pour toute matrice carrée M d'ordre 3, on posera $M^0 = I$.

Mise en situation

Cette partie est indépendante des suivantes.

4. Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre λ réel :

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x & & & = 0 \\ x & + & (3 - \lambda)y & - & z & = 0 \\ x & + & y & + & (1 - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$

On pourra être amené à distinguer les cas $\lambda = 2$ et $\lambda \neq 2$.

Indication. Rappelons la méthode pour ce genre de question : réduire le système avec l'algorithme du pivot de Gauss, en distinguant les cas de nullité des coefficients en position de pivot.

Inversibilité

5. a) Calculer le produit PQ .

Indication. Calcul pratique de produit matriciel conduisant à une matrice diagonale particulière.

b) En déduire que P est inversible, et donner P^{-1} .

Indication. Connaissez-vous un critère d'inversibilité pour lequel un seul produit matriciel suffit ? Cherchez une matrice \tilde{Q} telle que $P\tilde{Q} = I$ à partir de Q .

6. a) Résoudre le système suivant en fonction des paramètres a, b, c réels :

$$\begin{cases} & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & y & & = & c \end{cases}$$

Indication. N'auriez-vous pas déjà résolu un problème semblable en TD ? Suivez Gauss !

b) Retrouver le résultat de la question **6.b** à partir de cette résolution.

Indication. Connaissez-vous une méthode générale pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée, qui passe par la résolution d'un système linéaire ?

Calcul de puissances

7. On pose $B = P^{-1}AP$.

a) Calculer B .

Indication. Vous avez déterminé P^{-1} précédemment. Restent deux produits matriciels à calculer.

On vérifiera que B s'écrit sous la forme $B = \alpha I + J$ où α est un réel, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication. Indiquez la valeur de α correspondante.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

Indication. Cette question appelle un raisonnement par récurrence !

8. a) Calculer J^2 , puis J^k pour tout entier $k \geq 2$.

Indication. Inutile de faire une récurrence ici.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, la matrice B^n en fonction de I et de J . La formule obtenue est-elle encore valable pour $n = 1$? Pour $n = 0$?

Indication. Comme dans l'exemple du cours, il s'agit de s'appuyer sur la décomposition $B = \alpha I + J$. N'oubliez pas l'hypothèse essentielle de la formule du binôme de Newton pour les matrices.

c) Exprimer alors B^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Indication. Question de synthèse. Certains coefficients binomiaux sont particulièrement simples.

d) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Indication. Rappelons que $A^n = PB^nP^{-1}$ d'après...

Application

On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$x_0 = 1, y_0 = -2, z_0 = 3 \text{ et les relations de récurrence } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 2x_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

9. a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_{n+1} = AX_n$.

Indication. Calculez le produit matriciel AX_n , puis identifiez les coefficients.

b) Montrer, par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

Indication. La question est assez claire, non ? Vous pouvez remarquer un air de famille avec l'expression du terme général d'une suite géométrique.

- c) En déduire les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Indication. Question de synthèse. Vous avez calculé A^n précédemment.

Questions subsidiaires

10. Sans poser de calculs :

- a) Simplifier le produit QP .

Indication. Rappelez-vous qu'il y a un lien entre Q et P^{-1} .

- b) Montrer que la matrice Q est inversible, et exprimer Q^{-1} .

Indication. Utilisez les règles de calcul, ou cherchez une matrice \tilde{P} telle que $\tilde{P}Q = I$.

11. a) Justifier sans aucun calcul que B est inversible.

Indication. La matrice B a une « forme » particulière, n'est-ce pas ?

- b) Développer $(B - 2I)^2$. En déduire une expression de B^{-1} en fonction de B .

Indication. N'oubliez pas que les identités remarquables pour les matrices requièrent une condition spéciale ! Quel est le lien entre $B - 2I$ et J ? Cherchez une matrice M telle que $BM = I$.

- c) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = I - \frac{1}{4}A$.

Indication. Quel est le lien entre A et B ? Utilisez les règles de calcul.

- d) Retrouver ce résultat à l'aide du pivot de Gauss.

Indication. Question de vérification. Connaissez-vous une méthode générale pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée et calculer son inverse lorsqu'elle existe ?