Devoir en temps libre n° 5

E1A 2016–2017

à rendre le 20 février

Pour les questions repérées par l'étiquette ***[aide]****, reportez-vous aux compléments en fin d'énoncé.*

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème et d'étudier la rentablilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans la partie II de l'équation suivante pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie cette question dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

Partie I (ESSEC 2002 E)

1. Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0,1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.

Solution. On n'utilise pas ici le théorème de la bijection (il ne fournirait pas de valeur) mais tout simplement la résolution de l'équation du second degré $x^2 + x - 1 = 0$, dont les solutions sont $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} > 0$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < 0$. Il reste à vérifier que $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < 1$, ce qui est vrai puisque $\sqrt{5} < 3$ (en effet $5 < 9$). En conclusion $\boxed{r_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}}$.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.

Solution. Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Alors $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, donc $f(1) \leq f(x) \leq f(\frac{1}{2})$ car f est **décroissante** sur cet intervalle (composition de $x \mapsto x + 1$ et $y \mapsto \frac{1}{y}$). Or $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \leq 1$, donc $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$, c'est-à-dire $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$.

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

Solution. La fonction affine $u : x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et ne s'y annule pas, donc, par quotient, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est **bien définie** et **dérivable** sur cet intervalle.

Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Par règle de dérivation de $x \mapsto u(x)^{-1}$, on a $\boxed{f'(x) = (-1)\, u(x)^{-2}\, u'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}}$.

Or $(x+1)^2 > 0$ et $(x+1)^2 \geq (\frac{1}{2} + 1)^2 = \frac{9}{4}$, donc $\boxed{|f'(x)| = \dfrac{1}{(x+1)^2} \leq \dfrac{1}{9/4} = \dfrac{4}{9}}$.

d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 : **[aide]**

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x - f(x) = x - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x-1}{x+1}$, donc $r_2 - f(r_2) = 0$ par définition de r_2. Autrement dit, $f(r_2) = r_2$.

Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n)$, où $\mathcal{P}_n$ **est : «** $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ **et** $|u_n - r_2| \leq (\frac{4}{9})^n$ **».**

Initialisation. Posons $n = 0$. Alors $u_0 = 1$ par définition, donc $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. De plus $r_2 \in \,]0, 1[$, donc $|1 - r_2| = 1 - r_2 \leq 1 - 0 = 1 = (4/9)^0$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est démontrée.

Hérédité. **Soit** $n \in \mathbb{N}$**. On suppose** $\mathcal{P}_n$**.** On sait alors que $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$ d'après la question **1.b)**. De plus, $|u_{n+1} - r_2| = |f(u_n) - f(r_2)|$. Or d'après la question **1.c)**, f est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 1]$ de dérivée bornée par $\frac{4}{9}$, donc **l'inégalité des accroissements finis** montre que $|f(u_n) - f(r_2)| \leq (4/9)|u_n - r_2|$. Mais $|u_n - r_2| \leq (4/9)^n$ par hypothèse, donc on obtient finalement $|u_{n+1} - r_2| \leq (4/9)^{n+1}$, ce qui achève la démonstration de $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $|u_n - r_2| \leq (4/9)^n$. Or $|4/9| < 1$, donc d'après le théorème de convergence des **suites géométriques**, $(4/9)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Le **théorème d'encadrement** montre alors que (u_n) est convergente, de limite r_2.

2. Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ **(**$0 < x < 1$**)**

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0, 1[$.

Solution. La fonction $g : x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est **continue** (car polynomiale) et **strictement croissante** sur le **segment** $[0, 1]$. De plus $g(0) < 0 < g(1)$ car $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$. D'après le **théorème de la bijection**, il existe un unique réel $r_3 \in [0, 1]$ tel que $g(r_3) = 0$. De plus, $r_3 \in \,]0, 1[$ car $g(0) \neq 0$ et $g(1) \neq 0$.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.

Solution. Soit $x \in [\frac{1}{3}, 1]$. Alors $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, donc $f(1) \leq f(x) \leq f(\frac{1}{3})$ car f est **décroissante** (par composition). Or $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f(\frac{1}{3}) = \frac{9}{13} \leq 1$, donc $f(x) \in [\frac{1}{3}, 1]$.

c) Calculer les dérivées f' et f'' de f et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$.

Solution. La fonction polynomiale $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ est deux fois dérivable et ne s'annule pas sur $[\frac{1}{3}, 1]$, donc, par quotient, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est bien définie et deux fois dérivable sur cet intervalle. Par dérivation de $x \mapsto u(x)^{-1}$, on obtient (après quelques calculs soignés) :

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}} \quad \text{puis} \quad \boxed{f''(x) = \frac{6x^2+6x}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}}$$

Pour tout $x \in [\frac{1}{3}, 1]$, $f''(x) > 0$ d'après la règle des signes. Ainsi, f' est croissante sur cet intervalle. De plus f' est négative, donc on en déduit que $x \mapsto |f'(x)| = -f'(x)$ est décroissante sur cet intervalle, d'où l'existence d'un maximum, qui est atteint en $\frac{1}{3}$:

$$\boxed{\max_{x\in[\frac{1}{3},1]} |f'(x)| = -f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{135}{169}}$$

d) On considère la suite défnie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3. **[aide]**

Solution. La démonstration effectuée à la question **1.d)** s'adapte mot à mot, en prenant comme propriété de récurrence $\mathcal{P}_n$ **: «** $u_n \in [\frac{1}{3}, 1]$ **et** $|u_n - r_3| \leq (135/169)^n$ **».** On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r_3| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n}$$

Puisque $|135/169| < 1$, on conclut comme précédemment avec le théorème de convergence des suites géométriques et le théorème d'encadrement.

Partie II (ESSEC 2002 E)

1. Etude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0,1[$ lorsque $N > a$.

Solution. La fonction f_N est **continue** (car polynomiale) et **strictement croissante** sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. D'après le **théorème de la bijection**, l'ensemble-image $J = f(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle, et l'application $\phi : \mathbb{R}_+ \to J$ définie par $x \mapsto f_N(x)$ est bijective, d'application réciproque $\phi^{-1} : J \to \mathbb{R}_+$ continue et strictement croissante.

Précisons l'ensemble-image J : on sait déjà que c'est un **intervalle**. En remarquant que $f_N(0) = -a$ et $\lim_{x\to+\infty} f_N(x) = +\infty$, on en déduit par **croissance** de f que $J = [-a,+\infty[$.

En particulier $0 \in J$, donc par **bijectivité** de ϕ, il existe un unique $x_N \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_N(x_N) = 0$. Autrement dit, $\phi(x_N) = 0$ et $x_N = \phi^{-1}(0)$. De plus $f_N(0) \neq 0$, donc $x_N \in \mathbb{R}_+^*$.

Supposons maintenant que $N > a$. Alors $\phi(1) = f_N(1) = N - a > 0$, donc $\phi^{-1}(\phi(1)) > \phi^{-1}(0)$ par **stricte croissance**, c'est-à-dire $1 > x_N$. Ainsi $0 < x_N < 1$, d'où $x_N \in]0,1[$.

b) Montrer la relation $(*)$: $(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $(x-1)f_N(x) = (x-1)(x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x^1) - (x-1)a$. Le premier terme fait apparaître une **somme télescopique** bien connue :

$$(x-1)(x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x^1) = (x-1)\sum_{i=1}^{N} x^i = \sum_{i=1}^{N}(x-1)x^i = \sum_{i=1}^{N}(x^{i+1} - x^i) = x^{N+1} - x^1.$$

En développant, on obtient ainsi $\boxed{(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - x - (x-1)a = x^{N+1} - (a+1)x + a}$

2. Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante.

Solution. Soit $N \geq 1$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_{N+1}(x) = x^{N+1} + x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x = x^{N+1} + f_N(x) > f_N(x).$$

En particulier $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$, d'où $f_{N+1}(x_N) > 0$. Or $f_{N+1}(x_{N+1}) = 0$ et f_{N+1} est **stricte croissante** sur $\mathbb{R}_+$, donc $x_{N+1} < x_N$ (par l'absurde). Ceci étant vrai quelque soit $N \geq 1$, on en déduit que la suite $(x_N)_{N\geq 1}$ est strictement décroissante.

En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$.

Solution. La suite (x_N) est strictement **décroissante**. Elle est aussi **minorée** par 0 car pour tout $N \geq 1$, on a vu que $x_N \in \mathbb{R}_+^*$. Le **théorème de la limite monotone** montre que (x_N) converge vers un certain réel x^* tel que pour tout $N \geq 1$, $0 \leq x^* < x_N$. Puisque $x_N \in]0,1[$ dès que $N > a$, on en déduit que $0 \leq x^* < 1$, c'est à dire $x^* \in [0,1[$.

b) Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$ lorsque $N \geq A$ où A est un entier naturel non nul.

Solution. Soit A un entier naturel non nul, et $N \geq A$. Par **décoissance** de la suite, on sait que $x_N \leq x_A$. De plus, on a déjà vu que $x_N \in \mathbb{R}_+^*$, donc $0 < x_N < x_A$. La fonction $t \mapsto t^N$, c'est-à-dire la puissance Ne, étant **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\boxed{0 = 0^N < (x_N)^N \leq (x_A)^N}$$

En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de la suite $\left(x_N{}^N\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation $(*)$, exprimer la limite x^* en fonction de a.

Solution. Supposons que $A \geq a$. Alors $x_A \in \,]0,1[$ d'après la question **1.a)**. Le **théorème de convergence des suites géométriques** montre donc que $\lim_{N\to\infty}(x_A)^N = 0$. Par ailleurs, on a trivialement $\lim_{N\to\infty} 0 = 0$, donc d'après le **théorème d'encadrement**, la suite de terme général $(x_N)^N$ converge aussi vers la limite commune : $\boxed{\lim_{N\to\infty}(x_N)^N = 0}$

Puisque $f_N(x_N) = 0$, la relation $(*)$ montre que $0 = (x_N)^{N+1} - (a+1)x_N + a$ pour tout $N \geq A$. En passant aux limites, on en déduit par **opérations algébriques** que $\lim_{N\to\infty}(x_N)^{N+1} = 0 \times x^* = 0$, puis $0 = 0 - (a+1)x^* + a$. Puisque $a+1 \neq 0$ (car $a > 0$), on obtient finalement $\boxed{x^* = \frac{a}{a+1}}$

On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

c) Etablir à l'aide de la relation $(*)$ l'égalité suivante :

$$(N+1)\,\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a).$$

Solution. Comme précédemment la relation $(*)$ conduit à $(x_N)^{N+1} = (a+1)x_N - a$, d'où :

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right)^{N+1} &= (a+1)\,\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N) - a \\ &= a\,\varepsilon_N\end{aligned}$$

Les logarithmes de ces deux nombres sont donc égaux. D'après les règles de calcul, celui du terme de droite peut s'écrire $\ln(a\,\varepsilon_N) = \ln(\varepsilon_N) + \ln(a)$, tandis que celui du terme de gauche est :

$$\ln\left(\left(\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right)^{N+1}\right) = (N+1)\ln\left(\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right) = (N+1)\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right]$$

En multipliant par ε_N, on obtient : $\boxed{(N+1)\varepsilon_N\left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N\ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N\ln(a)}$

En déduire les limites de $(N+1)\,\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation $(*)$ un équivalent de ε_N en fonction de a et de N. **[aide]**

Solution. Avertissement : c'est de loin la question la plus technique et la plus difficile du sujet !
D'après la relation établie en **2.c)**, on peut écrire (si le dénominateur est non nul) :

$$(N+1)\varepsilon_N = \frac{\varepsilon_N\ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N\ln(a)}{\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)}$$

On sait que $\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N = 0$. De plus $\lim_{x\to 0}\ln(1+x) = \ln(1+0) = 0$ par **continuité** de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (composée de fonctions usuelles continues). Par **composition** de limites, on en déduit que $\lim_{N\to\infty}\ln(1+\varepsilon_N) = 0$. Par **somme**, le dénominateur tend donc vers $\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)$, qui est **non nul** (et même strictement négatif) car $\frac{a}{a+1} < 1$.
Considérons le numérateur. On sait que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ d'après les **croissances comparées**, donc $\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N\ln(\varepsilon_N) = 0$ par **composition des limites**. De plus, $\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N\ln(a) = 0$ par **produit**. Par **somme**, le numérateur tend donc vers $0+0=0$.
On obtient finalement la première limite recherchée par quotient : $\boxed{\lim_{N\to\infty}(N+1)\varepsilon_N = 0}$

Pour la deuxième, on passe en écriture exponentielle-logarithme (car la puissance dépend de la variable N qui tend vers $+\infty$), puis on fait intervenir astucieusement le **taux d'accroissement d'un logarithme** (il y a une forme indéterminée due à la limite du logrithme en 1) :

$$(1+\varepsilon_N)^{N+1} = \exp\left((N+1)\ln(1+\varepsilon_N)\right) = \exp\left((N+1)\varepsilon_N\frac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N}\right)$$

D'après le cours, on sait que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc par **composition** $\lim_{N\to\infty}\dfrac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N} = 1$. Or on a vu que $(N+1)\epsilon_N$ tend vers 0, donc par **produit** $\lim_{N\to\infty}(N+1)\ln(1+\varepsilon_N) = 0$. Enfin $\lim_{x\to 0}\exp(x) = \exp(0) = 1$ par **continuité** de exp, donc par **composition** : $\boxed{\lim_{N\to\infty}(1+\varepsilon_N)^{N+1} = 1}$

Pour l'équivalent, on repart de la formule établie en **2.c)** à partir de $(*)$:

$$a\,\varepsilon_N = \left(\frac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)\right)^{N+1} = \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}(1+\varepsilon_N)^{N+1},$$

de sorte que $a\left(\frac{a+1}{a}\right)^{N+1}\epsilon_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ d'après ce qui précède. Autrement dit $\boxed{\varepsilon_N \sim \frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}}$

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est à dire pendant les années $1, 2, \dots, N$.

Lorsque le taux d'intérêt des placements est supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)\,s$ à l'issue de l'année $1, \dots,$ à une somme $s_n = (1+r)^n\,s$ à l'issue de l'année $n, \dots$

Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n/\,(1+r)^n$ à l'issue de l'année 0 (puisque le placement d'une telle somme $S_n/\,(1+r)^n$ conduit précisément à l'obtention de la somme S_n à l'issue des n années de placement). Aussi appellera-t-on dans ce contexte *valeur présente* de la somme S_n la somme $S_n/\,(1+r)^n$.

3. Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Montrer que la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale, compte tenu de la dépense initiale S_0 et des revenus attendus à :

$$VP\,(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \cdots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{(1+r)} - S_0.$$

Solution. Remarquons que les intérêts sont linéaires par rapport à la somme placée : ceci permet de décomposer $VP(r)$ comme la somme des contributions de chaque année, à laquelle on soustrait l'apport initial. Pour chaque i tel que $1 \le i \le N$, l'investissement génère l'année i une somme S qui est placée au taux r pendant les $N-i$ années restantes : la somme finale correspondante est donc $(1+r)^{N-i}S$. La somme totale obtenue à l'issue des N années est donc $\sum_{i=1}^{N}(1+r)^{N-i}S$. Cependant, la somme que l'on aurait obtenue en placant directement S_0 au taux r est $(1+r)^N S_0$. On en déduit l'expression de la valeur présente de l'investissement en divisant par $(1+r)^N$:

$$\begin{aligned}
VP(r) &= \frac{1}{(1+r)^N}\left[\sum_{i=1}^{N}(1+r)^{N-i}S - (1+r)^N S_0\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N}(1+r)^{-i}S - S_0 \\
&= \boxed{\frac{S}{(1+r)} + \frac{S}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{S}{(1+r)^N} - S_0}
\end{aligned}$$

Remarque. une démonstration plus rigoureuse est possible en raisonnant par récurrence.

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP\,(r) \ge 0$ est vérifiée, c'est à dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer la somme S_0 au taux d'intérêt des placements comme on l'a décrit plus haut.

b) Montrer que l'équation $VP\,(r) = 0$ possède une unique racine strictement positive r_N et une seule si $N > S_0/S$, et donner l'expression de celle-ci en fonction de x_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \le r_N$

Solution. En factorisant $VP(r)$ par S, on obtient :

$$VP(r) = S\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^N + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{N-1} + \cdots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^1 - \frac{S_0}{S}\right]$$

Ainsi, $VP(r) = S \times f_N\left(\frac{1}{1+r}\right)$ à condition de poser $a = \frac{S_0}{S}$. Puisque $S > 0$, on a d'après l'étude précédente $VP(r)=0$ si et seulement $\dfrac{1}{1+r}=x_N$ car $\dfrac{1}{1+r}>0$. Autrement dit, $\boxed{r_N=\dfrac{1}{x_N}-1}$ est l'unique racine. Elle est bien strictement positive car on a vu que $0<x_N<1$ si $N>a$.

Enfin, la condition de réalisation peut s'exprimer de plusieurs façons équivalentes :

$$VP(r)\geq 0 \iff f_N\left(\frac{1}{1+r}\right)\geq 0 \iff \frac{1}{1+r}\geq x_N \iff 1+r\leq \frac{1}{x_N} \iff r\leq r_N$$

c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N), puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et de S_0 et préciser un équivalent de l'erreur r^*-r_N faite en remplaçant r_N par r^*. **[aide]**

Solution. Puisque la suite (x_N) est strictement décroissante et tend vers $\dfrac{a}{a+1}$, on déduit (par opérations sur les limites) de l'expression établie à la question précédente que (r_N) est strictement croissante et tend vers $\dfrac{a+1}{a}-1=\dfrac{1}{a}$. Ainsi $\boxed{r^*=\dfrac{1}{a}}$

De plus, $r_n=\dfrac{1}{x_N}-1=\dfrac{a+1}{a}\dfrac{1}{1+\varepsilon_N}-1=\dfrac{1-a\varepsilon_N}{a(1+\varepsilon_N)}$ d'où $r^*-r_N=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1-a\varepsilon_N}{a(1+\varepsilon_N)}=\dfrac{(a+1)\varepsilon_N}{a(1+\varepsilon_N)}$.
Puisque $\lim_{N\to\infty}(1+\varepsilon_N)=1$, l'équivalent obtenu en **2.c)** conduit à :

$$\frac{(a+1)\varepsilon_N}{a(1+\varepsilon_N)}\sim\frac{a+1}{a}\times\varepsilon_N\sim\frac{a+1}{a}\times\frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{r^*-r_N\sim\frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N}}$$

Remarque. je vous laisse justifier les étapes successives du calcul d'équivalents ci-dessus à partir de la définition. Vous reverrez ceci en deuxième année sous forme de règles de calculs.

Partie III. Questions classiques d'algèbre linéaire

Soient A,P et Q les matrices définies par :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad Q=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

On notera I la matrice identité d'ordre 3.
Par convention, pour toute matrice carrée M d'ordre 3, on posera $M^0=I$.

Mise en situation

Cette partie est indépendante des suivantes.

4. Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre λ réel :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}(2-\lambda)x & & & & & = & 0\\ x & + & (3-\lambda)y & - & z & = & 0\\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$

On pourra être amené à distinguer les cas $\lambda=2$ et $\lambda\neq 2$.

Solution. Il s'agit d'un système linéaire homogène, de 3 équations à 3 inconnues, avec un paramètre réel λ. Ce système est non échelonné.

• Premier cas : si $\lambda=2$. Alors le système linéaire s'écrit plus simplement :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}0 & & & & & = & 0\\ x & + & y & - & z & = & 0\\ x & + & y & - & z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\ x=-y+z\right.$$

Le système est compatible. De plus, il y a un seul pivot pour trois inconnues : l'ensemble des solutions est donc infini et on peut le décrire en choisissant $3-1=2$ paramètres : $\boxed{\left\{(-y+z,y,z)\mid(y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}}$.

• Deuxième cas : si $\lambda \neq 2$. Alors $\lambda - 2 \neq 0$, donc la première ligne fournit déjà $x = 0$. Le système linéaire est donc équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & (3-\lambda)y & - & z & = & 0 \\ & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - (3-\lambda)L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{cccccc} x & & & & = & 0 \\ & & - & (\lambda^2 - 4\lambda + 4)z & = & 0 \\ & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque alors que $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \neq 0$, de sorte que notre système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & & & & = & 0 \\ & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système compatible, de rang 3 (le nombre de pivots), à 3 inconnues : il est de Cramer. L'ensemble des solutions est donc réduit à un seul élément, qu'on obtient facilement : $\boxed{\{(0,0,0)\}}$.

Inversibilité

5. **a)** Calculer le produit PQ.

Solution. En posant le calcul, on obtient $PQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\boxed{PQ = 2I}$.

b) En déduire que P est inversible, et donner P^{-1}.

Solution. En posant $\widetilde{Q} = \frac{1}{2}Q$, l'égalité précédente donne $P\widetilde{Q} = \frac{1}{2}PQ = I$. D'après un **théorème du cours**, ceci montre que P est inversible, d'inverse

$$\boxed{P^{-1} = \widetilde{Q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

6. **a)** Résoudre le système suivant en fonction des paramètres a, b, c réels :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & y & & & = & c \end{array}\right.$$

Solution. Il s'agit d'un système linéaire non homogène, non échelonné, de trois équations à trois inconnues. Échelonnons le système. Après permutation des lignes, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & c \\ & & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \end{array}\right.$$

Effectuons l'opération suivante $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & c \\ & & y & + & z & = & a \\ & & -y & + & z & = & b - c \end{array}\right.$$

Effectuons maintenant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & c \\ & & y & + & z & = & a \\ & & & & 2z & = & b + a - c \end{array}\right.$$

Remarquons que nous obtenons ici un système linéaire échelonné, de 3 équations à 3 inconnues, dont les pivots sont tous les trois non nuls : le système admet donc une unique solution, que nous déterminons par une résolution « en cascade ».

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & c-\frac{1}{2}(a-b+c) \\ y & = & a-\frac{1}{2}(a+b-c) \\ z & = & \frac{1}{2}(a+b-c) \end{array}\right.$$

D'où finalement

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}(-a+b+c) \\ y & = & \frac{1}{2}(a-b+c) \\ z & = & \frac{1}{2}(a+b-c) \end{array}\right.$$

b) Retrouver le résultat de la question **5.b** à partir de cette résolution.

Solution. D'après le cours, on sait que prouver l'inversibilité de la matrice P revient à prouver que pour tout vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, il existe un unique vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $PX = Y$.
D'après les calculs de la question précédente, on sait déjà que P est inversible (car le système linéaire admet une unique solution, déterminée ci-dessus), et on obtient gratuitement la tête de P^{-1} : il suffit de lire $X = \boxed{P^{-1}}Y$.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de puissances

7. On pose $B = P^{-1}AP$.

a) Calculer B.

On vérifiera que B s'écrit sous la forme $B = \alpha I + J$ où α est un réel, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. Après un calcul un peu long mais très facile, on trouve : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

On reconnaît alors que B est égal à $\boxed{2\,I + J}$

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

Solution. Typiquement, cette question se traite par récurrence sur n.
• Initialisation à $n = 0$. La relation est claire, car par convention $A^0 = I$ et $PP^{-1} = I$.
• Hérédité. Soit n entier naturel. Supposons la relation $A^n = PB^nP^{-1}$ vraie. Montrons que cette relation est encore vraie au rang $n+1$. Il s'agit donc de montrer que $A^{n+1} = PB^{n+1}P^{-1}$.
Or $A^{n+1} = A\,A^n = A\,PB^nP^{-1}$, par hypothèse de récurrence.
Par ailleurs, de la relation $B = P^{-1}AP$, on tire (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}) que $A = PBP^{-1}$, d'où :

$$A^{n+1} = A\,A^n = PBP^{-1}\,PB^nP^{-1} = PBB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}.$$

• Conclusion. Le résultat est donc prouvé !

8. **a)** Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geq 2$.

Solution. Un calcul immédiat montre que $\boxed{J^2 = 0}$. On en déduit alors que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on a $\boxed{J^k = 0}$. En effet, il suffit d'écrire (astucieusement) :

$$J^k = J^{k-2}J^2 = J^{k-2} \times 0 = 0.$$

Notez qu'il serait maladroit de montrer ceci par récurrence sur k : soyez efficaces !

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, la matrice B^n en fonction de I et de J. La formule obtenue est-elle encore valable pour $n = 1$? Pour $n = 0$?

Solution. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Calculons $B^n = (2I+J)^n$. On est alors tenté d'écrire la formule du binôme de Newton. Pour cela, il faut s'assurer que les matrices $2I$ et J *commutent*. Or il est bien connu que toute matrice commute toujours avec la matrice identité, et donc aussi avec toute matrice scalaire (ce qui est le cas de la matrice $2I$). Ainsi,

$$\begin{aligned} B^n = (2I+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} J^k = \binom{n}{0}(2I)^n J^0 + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}J^1 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(2I)^{n-k} J^k \\ &= \boxed{2^n I + n\, 2^{n-1} J} \qquad \text{car } J^k = 0 \text{ pour } k \geq 2. \end{aligned}$$

La formule est encore vraie si $n = 1$, car $B = 2I + J$.
La formule est encore vraie pour $n = 0$ car $B^0 = I$ par convention et $2^0 I + 0J = I$.

c) Exprimer alors B^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Solution. D'après la question précédente, $\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n\,2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

d) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

Solution. Comme nous savons par les questions précédentes que $n \geq 0$, $A^n = PB^nP^{-1}$, il s'agit d'en effectuer la calcul pratique (un peu de courage !). On trouve alors :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} & n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Application

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ z_0 = 3 \text{ et les relations de récurrence } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

9. a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_{n+1} = AX_n$.

Solution. Question élémentaire, il suffit de savoir lire... On a par hypothèse $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$. Par ailleurs, remarquons que les relations de récurrence peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n + 0y_n + 0z_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}.$$

On reconnaît alors le produit matriciel de A par X_n.

b) Montrer, par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

Solution. • Initialisation pour $n = 0$: c'est clair car $A^0 = I$ par convention.
• Hérédité. Soit n entier naturel, $n \geq 0$ tel que la propriété est vraie au rang n. Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. Il s'agit donc de montrer que $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$.
Or d'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n$.
En injectant l'hypothèse de récurrence dans cette égalité, on obtient alors :

$$X_{n+1} = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0.$$

• D'où le résultat.

c) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Solution. On utilise le résultat de la question **8.d** et on trouve par produit matriciel :

$$\begin{cases} x_n = 2^n x_0 \\ y_n = 2^{n-1}\big(nx_0 + (n+2)y_0 + nz_0\big) \\ z_n = 2^{n-1}\big(nx_0 + ny_0 + (n+2)z_0\big) \end{cases}.$$

Questions subsidiaires

10. Sans poser de calculs :

a) Simplifier le produit QP.

Solution. D'après la question **5.b**, on sait que $PQ = 2I$. Or P est inversible, donc on peut multiplier à gauche par P^{-1}, et à droite par P, pour obtenir $P^{-1}PQP = 2P^{-1}P$. Or $P^{-1}P = I$, donc on en déduit que $\boxed{QP = 2I}$.

b) Montrer que la matrice Q est inversible, et exprimer Q^{-1}.

Solution. On vient de voir ci-dessus que $QP = 2I$. On en déduit alors que $Q\,\frac{1}{2}P = I$. D'après un théorème du cours, la matrice Q est donc inversible, d'inverse $\boxed{Q^{-1} = \dfrac{1}{2}P}$.

11. a) Justifier sans aucun calcul que B est inversible.

Solution. On remarque que la matrice B est une matrice triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. D'après le cours, on sait alors que la matrice B est inversible (et que son inverse est elle-même une matrice triangulaire supérieure).

b) Développer $(B - 2I)^2$. En déduire une expression de B^{-1} en fonction de B.

Solution. Comme toute matrice commute avec la matrice identité, toute matrice commute en particulier avec une matrice scalaire : ainsi B et $2I$ *commutent*. On peut alors développer selon la formule du binôme de Newton (ici la simple identité remarquable) :

$$(B - 2I)^2 = B^2 - 4B + 4I^2 = B^2 - 4B + 4I.$$

Par ailleurs, on se souvient que $B = 2I + J$ donc $(B - 2I)^2 = J^2$. Enfin, on avait remarqué à la question **8.a** que $J^2 = 0$.
Finalement, on a prouvé que

$$(B - 2I)^2 = B^2 - 4B + 4I^2 = B^2 - 4B + 4I = 0.$$

Enfin, raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} B^2 - 4B + 4I = 0 &\Leftrightarrow 4B - B^2 = 4I \\ &\Leftrightarrow B(4I - B) = 4I \\ &\Leftrightarrow B(I - \frac{1}{4}B) = I \end{aligned}$$

Ceci prouve alors que la matrice B est inversible (on le savait déjà) et que $\boxed{B^{-1} = I - \dfrac{1}{4}B}$

c) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = I - \frac{1}{4}A$.

Solution. D'après la question **7.a**, on sait que $A = PBP^{-1}$.
Écrite ainsi, on remarque que la matrice A est le produit de matrices inversibles (les matrices P, B et P^{-1}, elle est donc inversible et on a d'après la règle de calcul (dite de passage à l'inverse) :

$$A^{-1} = \left(PBP^{-1}\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PBP^{-1}.$$

En injectant alors le résultat de la question précédente dans cette égalité, on en déduit :

$$A^{-1} = PB^{-1}P^{-1} = P(I - \frac{1}{4}B)P^{-1} = PP^{-1} - \frac{1}{4}PB^{-1}P^{-1} = \boxed{I - \frac{1}{4}A}$$

d) Retrouver ce résultat à l'aide du pivot de Gauss.

Solution. Montrer que A est inversible et calculer son inverse revient à montrer que pour tout vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, il existe un unique vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = Y$.

Il s'agit donc de résoudre le système linéaire suivant (non homogène, non échelonné, de 3 équations, à 3 inconnues) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & & & = & a \\ x & + & 3y & - & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

On peut effectuer la méthode classique de Gauss (mise sous forme échelonéne puis résolution). On peut aussi aller un peu plus vite, étant donné que la première linge du système fournit déjà la valeur de x. Ainsi, le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & & & & = & & \frac{1}{2}a & & & & \\ & 3y & - & z & = & - & \frac{1}{2}a & + & b & & \\ & y & + & z & = & - & \frac{1}{2}a & & & + & c \end{array}\right.$$

Effectuons l'opération suivante $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & & & & = & & \frac{1}{2}a & & & & \\ & 3y & - & z & = & - & \frac{1}{2}a & + & b & & \\ & 4y & & & = & - & a & + & b & + & c \end{array}\right.$$

On obtient ainsi par résolution immédiate :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} x & & & = & & \frac{1}{2}a & & & & \\ & y & & = & - & \frac{1}{4}a & + & \frac{1}{4}b & + & \frac{1}{4}c \\ & & z & = & - & \frac{1}{4}a & - & \frac{1}{4}b & + & \frac{3}{4}c \end{array}\right.$$

Bilan : en écrivant sous la forme matricielle $X = A^{-1}Y$, on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$

On calcule par ailleurs la matrice donnée par $I - \frac{1}{4}A$ et on constate que l'on obtient exactement la matrice A^{-1}. D'où la confirmation attendue.