Correction du devoir en temps libre n° 4
Révisions pour le concours blanc

Exercice 1 : Connaissez-vous vos classiques ?

a. Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$.

Démontrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq p$, on a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

En déduire une expression simplifiée de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Démonstration. Soient k, p et n tels que décrits dans l'énoncé. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{k!} \quad \frac{1}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{1}{k!(p-k)!} \quad \frac{n!}{(n-p)!} \\
&= \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad = \binom{p}{k}\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$S = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}(1+1)^p = 2^p\binom{n}{p}$$

$$\boxed{S = 2^p \binom{n}{p}}$$

□

b. Résoudre l'équation $|2x+3|+|3x+2|=6$.

Démonstration. Afin de résoudre cette équation, nous déterminons les possibles valeurs du terme $|2x+3|+|3x+2|$ en fonction des valeurs de x.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\|2x+3\|$		$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$	
$\|3x+2\|$		$-3x-2$		$-3x-2$	0	$3x+2$	
$\|2x+3\|+\|3x+2\|$		$-5x-5$		$-x+1$		$5x+5$	

Il y a donc trois cas à étudier. On peut raisonner par implication sur chaque intervalle.

• Si $x\in]-\infty,-\dfrac{3}{2}[$:

$$\begin{array}{cl} \text{Si} & |2x+3|+|3x+2|=6 \\ \text{alors} & -5x-5=6 \\ \text{et} & x=-\dfrac{11}{5} \end{array}$$

Il faut alors de vérifier que $-\frac{11}{5}$ est bien solution de l'équation de départ. C'est le cas : $|2(-\frac{11}{5})+3|+|3(-\frac{11}{5})+2|=|-\frac{7}{5}|+|-\frac{23}{5}|=\frac{7}{5}+\frac{23}{5}=\frac{30}{5}=6$.

• Si $x\in[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{2}{3}[$:

$$\begin{array}{cl} \text{Si} & |2x+3|+|3x+2|=6 \\ \text{alors} & -x+1=6 \\ \text{et} & x=-5 \end{array}$$

Il faut alors de vérifier que -5 est bien solution de l'équation de départ. Ce n'est pas le cas : $|2(-5)+3|+|3(-5)+2|=|-7|+|-13|=7+13=20\neq 6$.

• Si $x\in[-\dfrac{2}{3},+\infty[$:

$$\begin{array}{cl} \text{Si} & |2x+3|+|3x+2|=6 \\ \text{alors} & 5x+5=6 \\ \text{et} & x=\dfrac{1}{5} \end{array}$$

Il faut alors de vérifier que $\frac{1}{5}$ est bien solution de l'équation de départ. C'est le cas : $|2(\frac{1}{5})+3|+|3(\frac{1}{5})+2|=|\frac{17}{5}|+|\frac{13}{5}|=\frac{17}{5}+\frac{13}{5}=\frac{30}{5}=6$.

$$\boxed{\text{L'équation admet deux solutions : } -\tfrac{11}{5} \text{ et } \tfrac{1}{5}.}$$ □

c. Factoriser le polynôme $P(x)=x^3-5x-2$.

Démonstration. -2 est racine évidente de P. On peut donc factoriser P par : $x-(-2)$. Plus précisément, on a : $P(x)=(x+2)(x^2-2x-1)$. Il s'agit alors de factoriser le polynôme $Q(x)=x^2-2x-1$. Pour ce faire, on calcule son discriminant réduit : $\Delta'=1+1=2$. Ainsi, $x_+=1+\sqrt{2}$ et $x_-=1-\sqrt{2}$ sont racines du polynôme Q.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } P(x)=(x+2)(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2})).}$$ □

d. On lance trois dés à 6 faces. Décrire l'univers Ω.

On note S l'événement « La somme des trois dés vaut 8 » et C l'événement « Au moins l'un des trois dés est un 5 ». Est-ce que S et C sont indépendants ?

Démonstration. Ω décrit l'ensemble des résultats possibles du lancer des 3 dés. C'est l'ensemble des 3-listes d'éléments de $[\![1, 6]\!]$. On a donc : $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$. On munit cet ensemble de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

On commence par dénombrer les éléments de S. On s'intéresse donc aux différentes manières d'obtenir une somme de 8 avec 3 dés.

Le plus grand dé est un 6 :	permutations de $(6, 1, 1)$	$\rightarrow$	3 lancers différents.
Le plus grand dé est un 5 :	permutations de $(5, 1, 2)$	$\rightarrow$	6 lancers différents.
Le plus grand dé est un 4 :	permutations de $(4, 1, 3)$	$\rightarrow$	6 lancers différents.
	et permutations de $(4, 2, 2)$	$\rightarrow$	3 lancers différents.
Le plus grand dé est un 3 :	permutations de $(3, 2, 3)$	$\rightarrow$	3 lancers différents.

Ainsi, $\mathrm{card}\, S = 21$ et $\mathbb{P}(S) = \dfrac{\mathrm{card}\, S}{\mathrm{card}\, \Omega} = \dfrac{21}{6^3} = \dfrac{7}{2 \times 6^2}$.

Afin de dénombrer les éléments de C, on étudie son événement contraire $\overline{C}$: « aucun des 3 dés ne vaut 5 ». On a donc : $\overline{C} = ([\![1, 6]\!] \setminus \{5\}) \times ([\![1, 6]\!] \setminus \{5\}) \times ([\![1, 6]\!] \setminus \{5\})$.
Aisni, $\mathrm{card}\, C = \mathrm{card}\, \Omega - \mathrm{card}\, \overline{C} = 6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$ et $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\mathrm{card}\, C}{\mathrm{card}\, \Omega} = \dfrac{91}{6^3}$.

On dénombre enfin les éléments de l'événement $S \cap C$: « Au moins l'un des trois dés est un 5 et la somme des trois dés est 8 ». Les lancers répondant à ces critères sont les permutations de $(5, 1, 2)$.
Ainsi, $\mathrm{card}(S \cap C) = 6$ et $\mathbb{P}(S \cap C) = \dfrac{\mathrm{card}(S \cap C)}{\mathrm{card}\, \Omega} = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{6^2}$.

Pour conclure sur l'indépendance des événements S et C, on compare les probabilités $\mathbb{P}(S) \times \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(S \cap C)$. On a :

$$\mathbb{P}(S) \times \mathbb{P}(C) = \frac{7}{2 \times 6^2} \, \frac{91}{6^3} = \frac{1}{6^2} \, \frac{7 \times 91}{2 \times 6^3} = \frac{1}{6^2} \, \frac{637}{432} \quad \neq \quad \frac{1}{6^2} = \mathbb{P}(S \cap C)$$

$$\boxed{\text{Les événements } S \text{ et } C \text{ ne sont donc pas indépendants pour la probabilité uniforme.}}$$

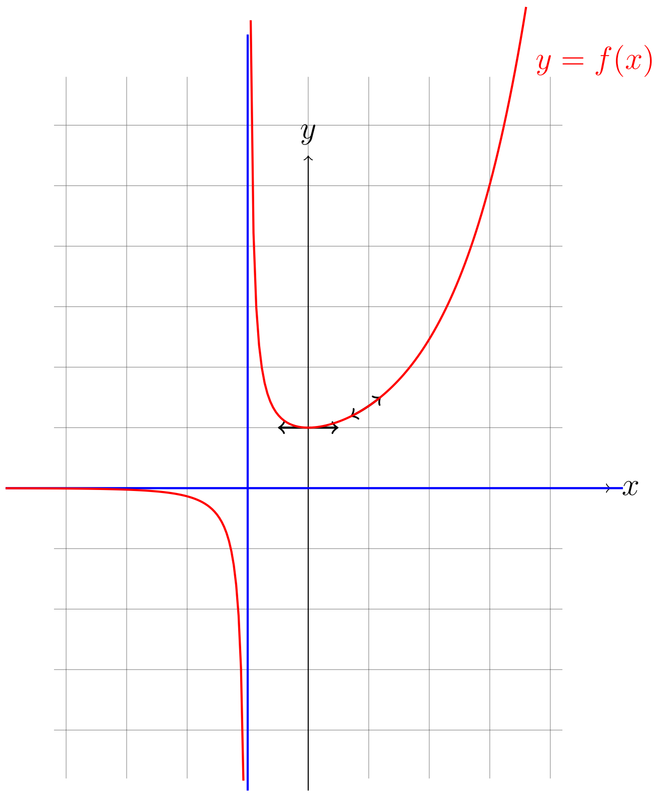
$\square$

e. Faire l'étude de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

Démonstration. La fonction f est obtenue par quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie et dérivable pour tout élément n'annulant pas son dénominateur *i.e.* sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Soit $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x+1) - \mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\ \mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$. $f'(x)$ est donc du signe de x.
On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

□



Pour avoir une idée plus précise de l'allure de la courbe, on peut calculer la dérivée de f en l'abscisse de plusieurs points. On a notamment : $f'(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{(1+1)^2} \simeq \dfrac{2.71}{4} \simeq 0.68$.

Exercice 2

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes. Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés.

	A	B	C
1	★		
2	★		★
3			

On définit les événements H, V, D et N par :
- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- G : « la partie est gagnée ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons.

Démonstration. La grille contient 9 positions. Les étoiles étant indiscernables, il y a en tout $\binom{9}{3}$ positionnements possibles des trois jetons. Or on a :

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\ 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

$$\boxed{\text{Il y a 84 positionnements possibles des trois jetons.}}$$

□

2. Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$ et $P(D)$ des événements H, V et D.

Démonstration. L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble $[\![1, 9]\!]$ (chaque case étant identifiée par un numéro dans $[\![1, 9]\!]$). Cet univers est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Calculer les probabilités demandées revient donc à dénombrer les trois ensembles H, V et D. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H) &= \frac{\operatorname{card} H}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28} \\
\mathbb{P}(V) &= \frac{\operatorname{card} V}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28} \\
\mathbb{P}(D) &= \frac{\operatorname{card} D}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(H) = \frac{1}{28},\ \mathbb{P}(V) = \frac{1}{28} \text{ et } \mathbb{P}(D) = \frac{1}{42}.}$$

□

3. En déduire la probabilité de l'événement G.

Démonstration. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. On a donc :

$$G = H \cup V \cup D$$

De plus ces trois événements sont deux à deux incompatibles puisque les trois jetons ne peuvent être alignés de deux manières différentes. Par additivité, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(D) \\ &= \frac{3}{84} + \frac{3}{84} + \frac{2}{84} \\ &= \frac{8}{84} = \frac{2}{21}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{2}{21}.}$$

□

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1. ***a.*** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n > n$.

1. **Initialisation** :
$u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > n+1$).
Par définition de la suite (u_n), on a : $u_{n+1} = 2u_n + (n+1)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > n$.
Donc $2u_n > 2n$.
Ainsi : $2u_n + (n+1) > 2n + (n+1) = 3n + 1$.
Enfin, comme $3n + 1 \geq n + 1$ (ceci équivaut à $n \geq 0$), on en déduit :

$$u_{n+1} = 2u_n + n + 1 > 3n + 1 \geq n + 1 \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} > n + 1$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Comme $u_n > n$ et que $n \to +\infty$, on a : $u_n \to +\infty$.

$$\boxed{u_n \to +\infty}$$

□

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n + n$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} + (n+1) \\ & = & 2u_n + n + 1 + (n+1) \\ & = & 2(u_n + n) + 2 \\ & = & 2v_n + 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc arithmético-géométrique.}}$$

□

b. Exprimer v_n en fonction de n.

Démonstration. On effectue l'étude de (v_n), suite arithmético-géométrique.
Notons λ l'unique solution de l'équation $x = 2x + 2$. On a $\lambda = -2$. D'autre part :

$$\begin{array}{rcccccl} v_{n+1} & = & 2 & v_n & + & 2 & (L_1) \\ \lambda & = & 2 & \lambda & + & 2 & (L_2) \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad v_{n+1} - \lambda = 2 \ (v_n - \lambda) \qquad (L_1) - (L_2)$$

Ainsi, la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - \lambda = v_n + 2$$

est une suite géométrique de raison 2.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n w_0 = 2^n(v_0 + 2) = 3 \times 2^n$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = w_n - 2 = 3 \times 2^n - 2.}$$

□

c. En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - n = 3 \times 2^n - 2 - n}$$

□

3. Écrire les commandes Scilab pour tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto 3 \times 2^x - x - 2$, pour x compris entre 0 et 5.

Démonstration.

```
function y = f(x)
  y = 3 * 2^x - 2 - x
endfunction
x = [0 : 0.1 : 5];          (x=linspace(0,5) convient aussi)
plot(x, f)
```

□

4. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer la somme S_n en fonction de n.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= 3 \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 2 \\ &= 3 \, \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) \\ &= 3 \, (2^{n+1} - 1) - \frac{1}{2} \, (n(n+1) + 4(n+1)) \\ &= 3 \times 2^{n+1} - \frac{1}{2} \, (n^2 + 5n) - 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 3 \times 2^{n+1} - \frac{1}{2} \, (n^2 + 5n) - 5}$$

□

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\ldots(1+\frac{1}{2^n})$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs u_0, u_1 et u_2.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \prod_{k=0}^{0}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 1+\tfrac{1}{2^0} = 1+1 = 2\\
u_1 &= \prod_{k=0}^{1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+\tfrac{1}{2^0})(1+\tfrac{1}{2}) = 2\times\tfrac{3}{2} = 3\\
u_2 &= \prod_{k=0}^{2}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+\tfrac{1}{2^0})(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2^2}) = 2\times\tfrac{3}{2}\times\tfrac{5}{4} = \tfrac{15}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a } u_0 = 2,\ u_1 = 3,\ u_2 = \tfrac{15}{4}}$$

□

2. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.

Démonstration. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}n$ où $\mathcal{P}n$ désigne la propriété $u_n \geq 2$.
Initialisation : $u_0 = 2$ donc $\mathcal{P}0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}n$. Par définition de la suite (u_n), on a :

$$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right)\times(1+\frac{1}{2^{n+1}}) = u_n\times(1+\frac{1}{2^{n+1}})$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 2$. Comme $1+\frac{1}{2^{n+1}} \geq 1$, on a $u_n\times(1+\frac{1}{2^{n+1}}) \geq u_n \geq 2$. Ainsi, $\mathcal{P}n+1$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2}$$

□

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = (1+\frac{1}{2^{n+1}})u_n$. Comme $u_n \neq 0$ ($u_n \geq 2$), on peut former la quantité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1+\frac{1}{2^{n+1}}) > 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$$

□

On rappelle que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$ *Nous avons déjà vu ceci dans le cours... On le redémontre par une étude de fonction classique, après avoir introduit une fonction auxiliaire...*

3. En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \geq 2 > 0$ on peut donc former la quantité $\ln(u_n)$. On a :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Or, pour tout $k \geq 0$, on a $\frac{1}{2^k} > -1$. On peut donc utiliser l'inégalité de la question *1.a.* de l'exercice 2. On en déduit $\ln(1+\frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ et par sommation :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \leq 2$$

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(u_n)) \text{ est majorée par 2.}}$$

□

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, \mathrm{e}^2]$.

Démonstration. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln(u_n) \leq 2$. La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit : $u_n \leq \mathrm{e}^2$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente, de limite ℓ. De plus, grâce au résultat de la question *2.a.*, on a : $2 \leq u_n \leq \mathrm{e}^2$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par passage à la limite, que : } 2 \leq \ell \leq \mathrm{e}^2}$$

□

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature (convergence / divergence) de la suite (S_n), de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(\ell - u_k)$$

a. Justifier que la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ln \ell$.

Démonstration. La suite (u_n) est convergente de limite ℓ et la fonction ln est continue.

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(u_n)) \text{ est donc convergente de limite } \ln \ell.}$$

□

Pour la suite, on admettra que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b. Déduire de l'inégalité précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}})$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par application de la fonction exponentielle (croissante), à l'inégalité précédente, on obtient : $\mathrm{e}^0 \leq \dfrac{\ell}{u_n} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}$. Par application de la fonction inverse (décroissante), on obtient que : $1 \geq \dfrac{u_n}{\ell} \geq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$. En multipliant chaque membre de cette inégalité par $\ell(\geq 0)$, on obtient : $\ell \geq u_n \geq \ell \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$. Il suffit alors de prendre l'opposé et d'ajouter ℓ : $\ell - \ell \leq \ell - u_n \leq \ell - \ell \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}})}$$

□

c. Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.

Démonstration. Notons $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - \mathrm{e}^{-x} - x \end{array} \right.$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$. Ainsi, $f'(x) > 0$ si et seulement si $x < 0$. D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit que f admet 0 pour maximum au point d'abscisse 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0 \ \textit{i.e.}\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x}$$

On a notamment : $1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$ et donc $\ell(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{\ell}{2^n}$. Or, d'après la question précédente, on a : $0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}})$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}}$$

□

d. Conclure quant à la nature (convergence / divergence) de la suite (S_n).

Démonstration. En sommant les inégalités précédentes, on obtient :

$$0 \ \leq \ \sum_{k=0}^{n} (\ell - u_k) \ \leq \ \sum_{k=0}^{n} \frac{\ell}{2^k} = \ell \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \ell \, \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \ell \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Ainsi, $S_n \leq \ell \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 2\ell$. De plus, la suite (S_n) est croissante. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} (\ell - u_k) - \sum_{k=0}^{n} (\ell - u_k) = \ell - u_{n+1} \geq 0 \text{ (d'après la question précédente)}$$

$$\boxed{(S_n) \text{ est croissante majorée donc convergente.}}$$

□

Exercice 5

Le *HUMUHUMUNUKUNUKUAPUA'A* (aussi appelé : *baliste écharpe*) est un poisson multicolore et un emblème de l'État de Hawaii.

1. Démontrer que le nombre N d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P (c'est-à-dire sans prendre en compte le U) est donné par la formule (on ne demande pas de faire le calcul) :

$$N = \frac{12!}{(2!)^4 3!}$$

Démonstration. Une anagramme contenant les lettres mentionnées est entièrement déterminée par :

a) les positions des lettres H : $\binom{12}{2}$ choix possibles (le mot comporte 12 lettres).

b) les positions des lettres M : $\binom{10}{2}$ choix possibles (il n'y a plus que 10 positionnements restants).

c) les positions des lettres N : $\binom{8}{2}$ choix possibles.

d) les positions des lettres K : $\binom{6}{2}$ choix possibles.

e) les positions des lettres A : $\binom{4}{3}$ choix possibles.

f) la position de la lettre P : $\binom{1}{1} = 1$ seule possibilité, les autres lettres étant placées.

Il y a donc $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3}$ anagrammes contenant ces lettres. Or :

$$\begin{aligned}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3} &= \frac{12!}{2!\ 10!} \times \frac{10!}{2!\ 8!} \times \frac{8!}{2!\ 6!} \times \frac{6!}{2!\ 4!} \times \frac{4!}{3!\ 1!} \\ &= \frac{12!}{(2!)^4\ 3!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } N = \frac{12!}{(2!)^4\ 3!}.}$$

□

Dans les questions suivantes, on pourra donner les résultats sous forme d'expressions pouvant contenir la lettre N. On ne demande pas de simplifier ou calculer numériquement ces résultats.

2. Combien existe-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

Démonstration. En effectuant le même raisonnement que dans la question précédente, on démontre qu'il y a : $\binom{21}{9}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3} = \binom{21}{9} \times N$ anagrammes du mot considéré.

$$\begin{aligned} \binom{21}{9} \times N &= \frac{21!}{9!\ 12!} \times \frac{12!}{(2!)^4\ 3!} \\ &= \frac{21!}{(2!)^4\ 3!\ 9!} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a } \frac{21!}{(2!)^4\ 3!\ 9!} \text{ anagrammes du mot considéré.}}$$

□

3. Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dite *équilibrée* lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet$$

où chacun des 10 symboles • désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.
Par exemple, l'anagramme PUAUKUNUKUAAHUMUNUHUM est équilibrée.

a. Justifer qu'il n'est pas possible que l'un des symboles • représente 4 lettres ou plus.

Démonstration. Supposons par l'absurde que l'un des symboles représente 4 lettres ou plus. Le mot initial comporte 21 lettres dont 9 lettres U. Il reste donc à caser 12 lettres dans 10 emplacements (à la place des symboles •). Si l'un de ces emplacements comporte 4 lettres ou plus, il reste à caser 8 lettres ou plus dans 9 emplacements. Ceci signifierait donc qu'un emplacement au moins est vide. C'est interdit.

$$\boxed{\text{Aucun symbole} \bullet \text{ne peut représenter 4 lettres ou plus.}}$$

□

b. Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

Démonstration. Si un emplacement • contient trois lettres qui ne sont pas des U, cela signifie qu'il reste 9 lettres à caser dans 9 emplacements différents. Autrement dit, chacun des autres emplacements ne contient qu'une lettre. Ainsi, pour obtenir une anagramme équilibrée du mot initial, il suffit de :

a) considérer une anagramme a du mot sans les lettres U (cf question ***1***),

b) choisir l'emplacement e qui contiendra 3 lettres,
(10 emplacements possibles)

c) écrire dans l'ordre chaque lettre du mot a aux emplacements • à l'exception de l'emplacement e dans lequel on écrit 3 lettres consécutives.

On en déduit, dans ce cas, que chaque anagramme du mot sans les lettres U donne lieu à 10 anagrammes équilibrées du mot initial.

Il y a $10 \times N$ anagrammes équilibrées du mot initial dont un emplacement $\bullet$ contient 3 lettres.

$\square$

c. Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

Démonstration. Dans ce cas, il y a 2 emplacements $\bullet$ qui contiennent 2 lettres consécutives et 8 emplacements $\bullet$ qui ne contiennent qu'une seule lettre. Pour former une anagramme équilibrée du mot initial, on peut procéder de manière analogue à la précédente :

a) considérer une anagramme b du mot sans les lettres U (cf question ***1***),

b) choisir l'emplacement e_1 et e_2 qui contiennent 2 lettres consécutives, *(choix de 2 emplacements parmi 10 possibles)*

c) écrire dans l'ordre chaque lettre du mot b aux emplacements $\bullet$ à l'exception des emplacements e_1 et e_2 dans lesquels on écrit 2 lettres consécutives.

On en déduit, dans ce cas, que chaque anagramme du mot sans les lettres U donne lieu à $\binom{10}{2} = \dfrac{10}{2!\ 8!} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$ anagrammes équilibrées du mot initial.

Il y a $45 \times N$ anagrammes équilibrées du mot initial dont aucun emplacement ne comporte trois lettres consécutives.

$\square$

d. Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

Démonstration. Les anagrammes équilibrées du mot initial se répartissent en deux catégories :

- les anagrammes dont un emplacement $\bullet$ contient trois lettres consécutives,
- les anagrammes dont aucun emplacement $\bullet$ ne contient trois lettres consécutives.

$\square$

Ces deux catégories étant disjointes, on en conclut qu'il y a $10 \times N + 45 \times N = 55 \times N$ anagrammes équilibrées du mot initial.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de donner pour n assez grand un encadrement de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ (somme qu'on ne sait pas calculer explicitement).

1. Calculer $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^3}$.

Démonstration. On a : $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} = 1 + \frac{3^3+2^3}{2^3 \times 3^3} = 1 + \frac{35}{216} = \frac{251}{216}$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^3} = \frac{251}{216}}$$

□

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Démonstration. Soit $k \geq 2$ et $n \geq 2$. On a : $k^3 \geq k^3 - k$ donc $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3-k}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} & \leq & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} \\ \text{et} \quad 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} & \leq & 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}.}$$

□

3. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Indication : On pourra d'abord chercher trois réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

Démonstration. Soit $k \geq 2$. Soient a, b et c tels que définis dans l'indication. On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} &= \frac{a\ k(k+1) + b\ (k-1)(k+1) + c\ k(k-1)}{k(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{k^2\ (a+b+c) + k\ (a-c) + (-b)}{k^3-k} = \frac{1}{k^3-k} \end{aligned}$$

En procédant par identification, on obtient le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ a-c & = & 0 \\ -b & = & 1 \end{array} \right.$$

On en conclut que $b=-1$ et a et c sont tels que :

$$\begin{cases} a+c &= 1 \\ a-c &= 0 \end{cases}$$

En sommant ces deux lignes, on obtient que $2a=1$ donc $a=\frac{1}{2}$. Enfin, $c=a=\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\frac{1}{k^3-k}=\frac{\frac{1}{2}}{k-1}-\frac{1}{k}+\frac{\frac{1}{2}}{k+1}}$$

En sommant chaque membre de cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}+\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}}$$

□

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n\geq 3$ on a

$$\frac{251}{216}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\leq\frac{5}{4}$$

Démonstration. Soit $n\geq 3$. D'après la question ***2)***, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{5}{4}$$

D'autre part, comme $n\geq 3$, on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k^3} \geq \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^3}=\frac{251}{216}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } n\geq 3, \text{ on a : } \frac{251}{216} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4}}$$

□

5. Écrire un programme Scilab qui demande un entier n et affiche $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$.

Démonstration.

```
function s = g(n)
  s = sum(1 ./[1 : n]^3);
  disp(s)
endfunction
```

□

6. La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ est-elle convergente ?

Démonstration. Soit $n \geq 1$. On a *par téléscopage* : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$.
La suite (u_n) est donc croissante. Elle est de plus majorée (cf question ***4***).

$$\boxed{\text{On en conclut que } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

□