Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 4 : Révisions pour le concours blanc

Vacances de Noël 2016

Durée conseillée : 7 heures, voire plus.

Ce devoir maison est volontairement très long. Le but est de réviser le concours blanc ainsi que le prochain devoir sur table qui arrive vite (fin janvier) et qui portera sur le dénombrement et les probabilités...
Entraînez-vous à bien rédiger. C'est maintenant que tout se joue ! La calculatrice est interdite.
***Un conseil** : inutile de faire tout le sujet en un jour : laissez-vous le temps de chercher chaque exercice de fond en comble. Ainsi, un bon équilibre serait de faire un exercice par jour pendant maximum 2h... Chronométrez-vous sur chaque exercice.*

Je vous souhaite à tous de joyeuses fêtes ; travaillez dur mais reposez-vous aussi ; la suite de l'année sera chargée mais ô combien riche en réussite !

Exercice 1 : Connaissez-vous vos classiques ?

a. Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$.
Démontrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq p$, on a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
En déduire une expression simplifiée de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

b. Résoudre l'équation $|2x+3| + |3x+2| = 6$.

c. Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 5x - 2$.

d. On lance trois dés à 6 faces. Décrire l'univers Ω.
On note S l'événement « La somme des trois dés vaut 8 » et C l'événement « Au moins l'un des trois dés est un 5 ». Est-ce que S et C sont indépendants ?

e. Faire l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

Exercice 2

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes. Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés.

	A	B	C
1	★		
2	★		★
3			

On définit les événements H, V, D et N par :
- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- G : « la partie est gagnée ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons.

2. Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$ et $P(D)$ des événements H, V et D.

3. En déduire la probabilité de l'événement G.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1. ***a.*** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n + n$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

3. Écrire les commandes Scilab pour tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto 3 \times 2^x - x - 2$, pour x compris entre 0 et 5.

4. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\dots(1+\frac{1}{2^n})$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs u_0, u_1 et u_2.

2. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

On rappelle que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$ *Savez-vous le reprouver ?*

3. En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, \mathrm{e}^2]$.

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature (convergence / divergence) de la suite (S_n), de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(\ell - u_n)$$

a. Justifier que la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ln \ell$.

Pour la suite, on admettra que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b. Déduire de l'inégalité précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}})$.

c. Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.

d. Conclure quant à la nature (convergence / divergence) de la suite (S_n).

Exercice 5

Le *HUMUHUMUNUKUNUKUAPUA'A* (aussi appelé : *baliste écharpe*) est un poisson multicolore et un emblème de l'État de Hawaii.

1. Démontrer que le nombre N d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P (c'est-à-dire sans prendre en compte le U) est donné par la formule (on ne demande pas de faire le calcul) :

$$N = \frac{12!}{(2!)^4 3!}$$

Dans les questions suivantes, on pourra donner les résultats sous forme d'expressions pouvant contenir la lettre N. On ne demande pas de simplifier ou calculer numériquement ces résultats.

2. Combien existe-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

3. Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dite *équilibrée* lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet$$

où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.

Par exemple, l'anagramme PUAUKUNUKUAAHUMUNMUHU est équilibrée.

a. Justifer qu'il n'est pas possible que l'un des symboles $\bullet$ représente 4 lettres ou plus.

b. Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

c. Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

d. Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

Exercice 6

Le but de cet exercice est de donner pour n assez grand un encadrement de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ (somme qu'on ne sait pas calculer explicitement).

1. Calculer $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^3}$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.

3. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.
Indication : On pourra d'abord chercher trois réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{k^3 - k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geq 3$ on a

$$\frac{251}{216} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4}$$

5. Écrire un programme Scilab qui demande un entier n et affiche $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

6. La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ est-elle convergente ?

Exercice 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S = \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

1. ***a)*** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(f'' est la dérivée seconde de f, c'est à dire la dérivée de f')

b) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.

2. ***a)*** Rappeler la formule du binôme de Newton pour $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$.
En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}$$

b) En déduire des expressions sous forme de sommes de $f'(1)$ et $f''(1)$.

3. En remarquant que $p^2 = \frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p$, déduire une expression de S en fonction de n.