Devoir en temps libre n° 3
Dénombrement et probabilités sur un univers fini

E1A (d'après des sujets d'A. Zoric)

À rendre le 16 décembre

1 Livres sur une étagère

On souhaite ranger 10 livres numérotés de 1 à 10 sur une même étagère.

1. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres les uns à côté des autres ?

> **Solution:** Les rangements possibles des 10 livres correspondent aux *permutations* d'un ensemble à 10 éléments. On sait qu'il y en a 10! d'après le cours. Rappelons pourquoi. Le choix d'un rangement est déterminé par : le choix du 1$^{\text{er}}$ livre parmi 10 possibilités, le choix du 2$^{\text{e}}$ livre parmi les 9 possibilités restantes, le choix du 3$^{\text{e}}$ livre... Par *produit* (lemme des bergers), on obtient
>
> $$\boxed{10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1 = 10! \text{ rangements possibles.}}$$

2. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres les uns à côté des autres, de telle sorte que la suite des numéros lus de la gauche vers la droite soit monotone ?

> **Solution:** La seule permutation croissante des entiers de 1 à 10 est : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. La seule permutation décroissante des entiers de 1 à 10 est $10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. D'après le *principe de partition*,
>
> $$\boxed{\text{il n'y a que } 1 + 1 = 2 \text{ rangements monotones.}}$$

3. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres les uns à côté des autres, de telle sorte que les trois premiers livres soient les livres 1,2 et 3 dans cet ordre ?

> **Solution:** Un tel rangement est en fait déterminé par la permutation des 7 livres numérotés de 4 à 10. Le *principe de bijection* montre donc qu'il y a
>
> $$\boxed{7! \text{ rangements vérifiant cette contrainte.}}$$

4. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres les uns à côté des autres, de telle sorte que les trois premiers livres soient les livres 1,2 et 3 (mais pas nécessairement dans cet ordre) ?

> **Solution:** Un tel rangement est déterminé de façon unique (bijection) par :
>
> — la permutation des trois premiers livres, parmi 3! possibilités,
>
> — la permutation des sept livres restants, parmi 7! possibilités.
>
> Le nombre total de rangements est donné par le *cardinal d'un produit cartésien*.
>
> $$\boxed{\text{Il y a donc } 3! \times 7! \text{ rangements vérifiant cette contrainte.}}$$

5. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres les uns à côté des autres, de telle sorte que les livres 1,2 et 3 se trouvent côte à côte (mais pas nécessairement dans cet ordre) ?

Solution: Un tel rangement est déterminé de façon unique (bijection) par :
— la position du bloc des livres 1, 2 et 3. Cette position est déterminée par le nombre (de 0 à 7) de livres placés *avant* le premier livre du bloc, soit 8 possibilités.
— la permutation des livres $1, 2, 3$, parmi $3!$ possibilités,
— la permutation des sept livres restants, parmi $7!$ possibilités.

Le nombre total de rangements est le cardinal d'un produit cartésien.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 8 \times 3! \times 7! \text{ rangements vérifiant cette contrainte.}}$$

2 Des boules dans des boîtes

Soit r un entier naturel non nul.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à répartir au hasard r boules (que l'on supposera numérotées de 1 à r) dans 3 boîtes, que l'on numérotera de 1 à 3.

On note A l'évènement *« aucune des 3 boîtes n'est vide »*, et pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$ on note A_i l'évènement *« la boîte numéro i n'est pas vide »*.

2.1 Préliminaires

6. Écrire A à l'aide des évènements A_1, A_2 et A_3.

Solution: Aucune des boîtes n'est vide si et seulement les évènements A_1, A_2 et A_3 sont tous les trois réalisés. Ainsi $\boxed{A = A_1 \cap A_2 \cap A_3.}$

7. Exprimer en français l'évènement $\overline{A}$.

Solution: L'évènement contraire de A s'exprime $\boxed{\text{« au moins une des boîtes est vide ».}}$

8. (a) Les évènements A_1, A_2 et A_3 sont-ils deux à deux incompatibles ?

Solution: On distingue deux cas :

— Si $r = 1$. Il y a une seule boule, qui ne peut pas se trouver à la fois dans deux boîtes distinctes. Ainsi, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous i, j distincts. Donc les évènements sont deux à deux incompatibles.
— Si $r \geq 2$. Alors A_1 et A_2 peuvent être réalisés simultanément : il suffit que la première boule soit dans la boîte 1 et que la deuxième boule soit dans la boîte 2 (par exemple). Ainsi $1_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ donc A_1 et A_2 ne sont pas incompatibles. A fortiori, (A_1, A_2, A_3) ne sont pas deux à deux incompatibles.

(b) Le triplet (A_1, A_2, A_3) forme-t-il un système complet d'évènements ?

Solution: Si $r \geq 2$, les évènements ne sont *pas deux à deux incompatibles*, donc ne forment pas un système complet d'évènements.
Supposons donc que $r = 1$. Alors les évènements sont *deux à deux incompatibles*. Il faut aussi vérifier qu'ils *recouvrent l'univers* : ceci vient du fait que la boule est forcément dans l'une des boîtes, donc $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ est nécessairement réalisé.

2.2 Probabilité qu'aucune boîte ne soit vide

9. Montrer que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{P}(\overline{A_i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^r$.

Solution: Soit $i \in [\![1,3]\!]$. Déterminons la probabilité de l'évènement $\overline{A_i}$: « la boîte i est vide ». Introduisons, pour $1 \leq j \leq r$, l'évènement B_j : « la j boule est dans la boîte i ». Ainsi, $\overline{A_i} = \cap_{j=1}^{r} \overline{B_j}$.

Les conditions de l'expérience nous permettent de considérer que les tirages sont *équiprobables*, de sorte que pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, $\mathbb{P}(B_j) = \frac{1}{3}$. On peut aussi supposer que les évènements $(B_j)_{1\leq j\leq r}$ sont *mutuellement indépendants*. Alors, les évènements $(\overline{B_j})_{1\leq j\leq r}$ sont mutuellement indépendants eux aussi, donc :

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{r} \overline{B_j}\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\overline{B_j}) = \prod_{i=1}^{r}(1 - \mathbb{P}(B_j)) = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{3}) = (1 - \frac{1}{3})^r = \left(\frac{2}{3}\right)^r.$$

10. Calculer $\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$, $\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_3})$ et $\mathbb{P}(\overline{A_2} \cap \overline{A_3})$.

Solution: Par *équiprobabilité*, les boîtes 1,2 et 3 jouent des rôles symétriques, donc il suffit de calculer la première probabilité, qui est celle de l'évènement $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$: « les boîtes 1 et 2 sont vides ». Cet évènement s'exprime comme l' *intersection*, pour $j \in [\![1,r]\!]$, des évènements B_j : « la boule j est dans la boîte 3 ». Par *indépendance mutuelle*, on peut écrire

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{r} B_j\right) = \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}(B_j) = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^r.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_3}) = \mathbb{P}(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \left(\frac{1}{3}\right)^r.}$

11. Calculer $\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$.

Solution: L'évènement $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ s'exprime par « les trois boîtes sont vides », qui est *impossible*. En effet $r \geq 1$, donc il y a au moins une boule et celle-ci est contenue dans l'une des trois boîtes. Ainsi $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \emptyset$, donc

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0}$$

12. Déduire de ce qui précède que : $\mathbb{P}(A) = 1 - 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^r - \left(\frac{1}{3}\right)^r\right)$.

Solution: On a vu que $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, donc $\overline{A} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$ d'après les *lois de De Morgan*. La *formule du crible de Poincaré* donne alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A}) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}) + \mathbb{P}(\overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_3}) - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) - \mathbb{P}(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) - \mathbb{P}(\overline{A_3} \cap \overline{A_1}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^r + \left(\frac{2}{3}\right)^r + \left(\frac{2}{3}\right)^r - \left(\frac{1}{3}\right)^r - \left(\frac{1}{3}\right)^r - \left(\frac{1}{3}\right)^r + 0 \\
&= 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^r - \left(\frac{1}{3}\right)^r\right).
\end{aligned}$$

Le résultat annoncé s'obtient en alors en revenant à *l'évènement contraire* : $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$.

13. En déduire, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{r\to+\infty} \mathbb{P}(A)$.
Commenter brièvement le résultat obtenu.

Solution: Puisque $|\frac{2}{3}| < 1$ et $|\frac{1}{3}| < 1$, on est dans le cas de convergence vers 0 des *suites géométriques* :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^r \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0, \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^r \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

D'après les propriétés *d'opérations algébriques* sur les limites, on en déduit que $\mathbb{P}(A)$ converge vers $1+3(0-0) = 1$ quand r tend vers l'infini. Autrement dit, lorsque le nombre de boules tend vers l'infini,

$$\boxed{\text{on est } \textit{presque sûr} \text{ qu'aucune des trois boîtes n'est vide.}}$$

Ceci est bien sûr fidèle à l'intuition qu'on peut se faire du problème.
Remarque. Pour obtenir seulement la limite, on aurait pu aller plus vite avec l'inégalité de Boole :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}) \leq \mathbb{P}(\overline{A_1}) + \mathbb{P}(\overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^r,$$

ce qui entraîne $1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^r \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, d'où le résultat en utilisant le théorème d'encadrement.

3 Somme de coefficients binomiaux

L'objectif de cet exercice est de démontrer, en utilisant trois méthodes différentes, la formule :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \tag{$\star$}$$

14. Interpréter la somme figurant dans cette formule du point de vue du triangle de Pascal.

Solution: *L'indice de sommation* k correspond aux numéros de ligne dans le triangle de Pascal, tandis que le numéro de colonne p est constant. Il s'agit donc de la somme de tous les termes de la colonne numéro p du triangle de Pascal, jusqu'à la ligne n.

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	$\boxed{10}$	5	1

Exemple : formule obtenue pour $p = 2$ et $n = 4$.

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3}$$

$$1 + 3 + 6 = \boxed{10}$$

3.1 Première méthode

15. Démontrer la formule en raisonnant par récurrence sur n.

Solution: Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ». Nous allons démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p,\ \mathcal{P}_n$.

— Initialisation. Pour $n = p$, on a $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$, et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = 1$ donc $\mathcal{P}_p$ est vérifiée.

— Hérédité. *Soit $n \geq p$. On suppose $\mathcal{P}_n$.* Démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ sous cette hypothèse :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \qquad \text{d'après } \mathcal{P}_n,$$

et d'après la *formule de Pascal*, cette dernière somme vaut $\binom{n+2}{p+1}$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Conclusion. Le *principe de récurrence* permet d'en déduire que pour tout entier $n \geq p$, $\mathcal{P}_n$.

Ceci étant vrai quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a démontré la propriété $(\star)$.

3.2 Deuxième méthode

16. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq p$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

Solution: *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $k \geq p$.* D'après la *formule de Pascal*,

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{k}{p} + 0 = \binom{k}{p}.$$

17. En déduire une nouvelle démonstration de la formule $(\star)$.

Solution: Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$. Notons $u_k = \binom{k}{p+1}$ pour tout $k \in \{p, p+1, \ldots, n\}$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k),$$

ce qui fait apparaître une *simplification télescopique* :

$$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1}.$$

Puisque $p+1 > p$, le terme $\binom{p}{p+1}$ est nul et on obtient donc finalement :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} - 0 = \binom{n+1}{p+1}.$$

3.3 Troisième méthode

Soit p un entier naturel, et soit n un entier tel que $n \geq p$.

On se donne une urne opaque contenant $n+1$ jetons numérotés de 1 à $n+1$, supposés indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément $p+1$ jetons depuis cette urne.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note M_k l'évènement *« le plus grand numéro obtenu est $k+1$ »*.

18. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui permet de modéliser cette expérience aléatoire.

Solution: Notons E l'ensemble des $n+1$ jetons, qu'on peut identifier à l'ensemble $[\![1, n+1]\!]$ via leur numérotation (elle fournit une bijection). Le tirage se fait *sans remise* et *sans tenir compte de l'ordre*, du fait de la simultanéité. Une issue est donc simplement décrite par l'ensemble des $p+1$ jetons obtenus.

- On choisit comme univers Ω l'ensemble $\mathcal{P}_{p+1}(E)$ des parties de E qui possèdent $p+1$ éléments.
- L'ensemble des évènements sur cet univers fini est $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Les conditions de l'expérience permettent de supposer que les tirages sont *équiprobables*. On munit donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la *probabilité uniforme* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

19. Justifier que, pour tout $k \in [\![p, n]\!]$, il y a autant de tirages réalisant M_k qu'il y a de parties de $[\![1, k]\!]$ de cardinal p.

> **Solution:** Un tirage réalisant M_k se compose :
> — du jeton numéro $k+1$
> — de p autres jetons dont les numéros sont dans $[\![1, k]\!]$.
>
> Ceci induit une bijection entre les ensembles M_k et $\mathcal{P}_p([\![1, k]\!])$. D'après le *principe de bijection*, ils ont donc le même nombre d'éléments.

20. En déduire que pour tout $k \in [\![p, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(M_k) = \frac{\binom{k}{p}}{\binom{n+1}{p+1}}.$$

> **Solution:** Par définition de la *probabilité uniforme*, on sait que $\mathbb{P}(M_k) = \dfrac{\mathrm{card}(M_k)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.
>
> Avec la question précédente, on obtient $\mathrm{card}(M_k) = \binom{k}{p}$ par *définition des coefficients binomiaux*.
>
> Enfin $\Omega = \mathcal{P}_{p+1}(E)$ avec $\mathrm{card}(E) = n+1$, donc on a de même $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{n+1}{p+1}$.

21. Montrer que $(M_k)_{k \in [\![p,n]\!]}$ forme un système complet d'évènements.

> **Solution:** Nous devons montrer que les évènements $(M_k)_{k \in [\![p,n]\!]}$ *recouvrent l'univers* Ω et qu'ils sont *deux à deux incompatibles*.
>
> 1. Montrons que $\Omega = \bigcup_{k=p}^{n} M_k$. L'autre inclusion étant triviale, montrons que $\Omega \subset \bigcup_{k=p}^{n} M_k$. Soit $\omega \in \Omega$ une issue de l'expérience. Notons m le numéro maximal parmi les $p+1$ jetons obtenus. Remarquons que $m \geq p+1$ car sinon ces $p+1$ jetons auraient leurs numéros dans $[\![1, p]\!]$ et on pourrait donc en trouver au moins deux qui ont le même numéro (principe des tiroirs), ce qui est absurde. Ceci montre qu'en posant $k = m-1$, on a bien $k \geq p$ et $\omega \in M_k$. Ainsi $\Omega \subset \bigcup_{k=p}^{n} M_k$.
> 2. Soient $(i, j) \in [\![p, n]\!]^2$ distincts. Alors $M_i \cap M_j$ correspond aux tirages pour lesquels le plus grand numéro obtenu est à la fois $i+1$ et $j+1$. Ceci est absurde car $i \neq j$. Ainsi $M_i \cap M_j = \emptyset$, c'est-à-dire que M_i et M_j sont incompatibles.

22. Déduire de ce qui précède une nouvelle démonstration de la formule $(\star)$.

> **Solution:** Puisque les (M_k) forment un *système complet d'évènements*, on sait d'après le cours que
>
> $$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=p}^{n} \mathbb{P}(M_k).$$
>
> Or $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, et on a calculé plus haut la valeur de $\mathbb{P}(M_k)$. On en déduit que $1 = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{\binom{k}{p}}{\binom{n+1}{p+1}}$.
>
> En multipliant les deux membres de cette égalité par $\binom{n+1}{p+1}$, on obtient enfin (par linéarité de Σ) :
>
> $$\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}}$$