Devoir en temps libre n° 2

E1A 2016-2017

à rendre le 18 novembre

Exerice 1

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{n\cdot n!}$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer par réccurence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et que $u_n > 0$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n^2 \geq 2n+1$.
5. Étudier la convergence ou la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner un exemple de telle fonction f lorsque (u_n) est :
   (a) arithmétique,
   (b) géométrique,
   (c) arithmético-géométrique.
2. On suppose que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Rappeler la définition de « f est croissante ».
   (b) Démontrer par récurrence que si $u_1 - u_0 \geq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
   (c) Discuter la monotonie de (u_n) selon le signe de $u_1 - u_0$.
3. On suppose que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $u_2 \leq u_0 \leq u_1 \leq u_3$ ou $u_3 \leq u_1 \leq u_0 \leq u_2$.
   (b) Dans chacun de ces deux cas, montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de variations opposés.