Indications pour le devoir en temps libre n° 1

E1A 2016-2017

Rappel important

Lorsqu'on dispose d'un élément $e \in E$ et d'une proposition universellement quantifiée de la forme $(\forall x \in E,\ P(x))$, on peut en déduire automatiquement la proposition $P(e)$ obtenue à partir de $P(x)$ en remplaçant chaque occurrence de la lettre x par e. Par exemple :

- On sait que pour tout α réel, $2^\alpha = \exp(\alpha \ln(2))$. Donc $2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln(2))$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u_n = 0 \text{ ou } u_{n+1} = 0)$, alors on peut en déduire que $u_{2016} = 0$ ou $u_{2017} = 0$.
- Soit f une fonction telle que pour tout x réel, $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$. Alors pour tout x réel, $f(-xe^x) = \ln((-xe^x)^2 - (-xe^x) + 1) = \ln(x^2e^{2x} + xe^x + 1)$.

On utilise couramment ce procédé de substitution pour évaluer les fonctions.

1 Substitution de variables

1. — Revoir dans le cours les définitions de : valeur absolue, partie entière et racine carrée.
   — Soient f une fonction de domaine de définition D_f et g une fonction de domaine de définition D_g. Alors pour tout nombre x, le nombre $f(g(x))$ est bien défini si et seulement si g est bien définie en x et f est bien définie en $g(x)$, c'est-à-dire si et seulement si « $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$ ». La définition de $f(g(x))$ s'obtient alors en subtituant $g(x)$ à la variable dans la définition de f.
2. Il s'agit encore de substitutions. Les calculs de sommes testent aussi la compréhension de la notation $\sum_{i=a}^{b}$. Commencer par écrire ces sommes explicitement. Par exemple :

$$\sum_{j=0}^{3} u_{2j+1} = u_{2\times 0+1} + u_{2\times 1+1} + u_{2\times 2+1} + u_{2\times 3+1} = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 = \dots$$

   Attention à identifier correctement l'indice de sommation !

2 Valeur absolue

Pour chacune des cinq résolutions, commencer par exprimer sans valeurs absolues l'équation ou l'inéquation à l'aide d'études de signe. La résolution se fait alors par disjonction de cas. Par exemple, l'inéquation $|x + 1| + |x - 2| \leq 1$ d'inconnue x conduit aux trois sous-intervalles $]-\infty; -1]$, $[-1; 2]$ et $[2; +\infty[$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		$-(x+1)$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert x-2\rvert$		$-(x-2)$		$-(x-2)$		$x-2$	
$\lvert x+1\rvert + \lvert x-2\rvert$		$-2x+1$		3		$2x-1$	

L'inéquation $-2x+1 \leq 1$ n'a pas de solution dans $]-\infty; -1]$. De même $3 \leq 1$ n'a pas de solution dans $[-1; 2]$ et $2x-1 \leq 1$ n'a pas de solution dans $[2; +\infty[$. L'inéquation initiale n'a donc aucune solution dans $\mathbb{R}$. Astuce : utiliser le tableau pour tracer la fonction et vérifier vos solutions.

3 Étude de fonctions

Appliquer la méthode vue en cours. L'étude de la fonction g passe par une étude de signe. Penser à réécrire la fonction h en utilisant la définition des puissances généralisées.

4 Inégalité de Bernoulli

Étude de fonction. Il s'agit ici d'une application de la méthode fondamentale vue en TD : *Soient I un intervalle, a et b deux fonctions composées de fonctions usuelles. Pour démontrer que* $(\forall x \in I,\ a(x) \leq b(x))$*, on fait l'étude de la fonction auxiliaire* $c : x \mapsto a(x) - b(x)$ *et on en déduit son signe sur l'intervalle I.*

Récurrence. Attention au signe dans les inégalités : $1 \times 2 < 1 \times 3$ mais $-1 \times 2 > -1 \times 3$.

5 Suite définie par une relation de récurrence

Rédiger très soigneusement la démonstration par récurrence. Attention à l'écriture de la propriété de récurrence au rang $n+1$ (bien faire la substitution).

6 Décomposition et télescopage

1. Penser à la méthode d'identification.
2. Faire intervenir une sommation télescopique (ou deux).

7 Une somme dérivée

1. La dérivée d'une somme finie de fonctions est la ... des dérivées des fonctions.
6. Revoir la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.

8 Produits et sommes doubles

— Le calcul des *produits* A et B passe en fait par des *sommes* usuelles.

— Pour C et E, attention aux indices de sommations et aux règles de calcul sur les sommes.

— Pour D et F, introduire une indicatrice de manière à prendre en compte la contrainte $i \leq j$ avant d'intervertir l'ordre des deux sommations (si nécessaire).